Б. Р. Вайнберг

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В УРАВНЕНИЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Володе!
На добрую память
Вайнбр

Б. Р. Вайнберг

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В УРАВНЕНИЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1982

УДК 517.9

Вайнберг Б. Р. Асимптотические методы в уравнениях математической физики. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982. — 296 с.

В монографии рассмотрены основные асимптотические методы, используемые в линейных задачах математической физики. Изложение начинается с метода стационарной фазы и его применений и метода ВКБ для обыкновенных дифференциальных уравнений. Излагаются методы асимптотического исследования гиперболических уравнений и систем, метод канонического оператора, исследуется разрешимость эллиптических задач в ограниченной и неограниченной областях с компактной границей, поведение решений этих задач на бесконечности. Изучено поведение решений гиперболических уравнений при $t \to \infty$, получена коротковолновая и длинноволновая асимптотика решений стационарных задач, асимптотика амплитуды рассеяния.

Библиогр. 197 назв. Ил. 15.

Рецензенты:
проф. *Ю. В. Егоров*, проф. *М. В. Федорюк*

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

В $\frac{1702050000-169}{077(02)-82}$ 111—82

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения, для которых можно написать точное решение, встречаются достаточно редко. Для отыскания решения чаще всего применяются либо численные, либо асимптотические методы. Во многих теоретических и прикладных вопросах именно возможность получить асимптотическое решение позволяет провести наиболее полный анализ задачи. Поэтому едва ли есть необходимость подробно объяснять важность асимптотических методов.

Конечно, изложить в одной книге даже основные асимптотические методы, используемые в уравнениях математической физики, абсолютно невозможно. Такую цель автор и не преследовал. В книге рассматривается круг вопросов, связанных с получением высокочастотных и низкочастотных асимптотических разложений решений линейных стационарных и нестационарных задач, а также с исследованием поведения решений стационарных задач на бесконечности и нестационарных — при неограниченном возрастании времени.

Книга написана по материалам специальных курсов, которые автор в течение ряда лет читал для студентов и аспирантов механико-математического факультета МГУ. Основой первой половины книги (главы I—V) являются лекции для аспирантов-механиков; программа этих лекций была составлена с учетом рекомендаций и пожеланий кафедр отделения механики. Указанные главы содержат классический материал, который по своей законченности и большому числу физических приложений давно заслуживает включения в университетские курсы уравнений математической физики. Эта часть умышленно написана весьма подробно с тем, чтобы она могла служить учебным пособием для студентов физико-математических специальностей и была доступна лицам, имеющим втузовское математическое образование.

Вторая половина книги посвящена близким к рассматривающимся в первых главах, но более специальным вопросам. В основном она написана по материалам исследований автора. Эта часть книги рассчитана на более подготовленного читателя, и потому изложение здесь ведется в более сжатом виде.

Поскольку почти перед каждой главой книги имеется небольшое введение и в конце глав — литературные замечания и дополнения, то здесь мы ограничимся только весьма кратким описанием содержания. В первой главе дано обоснование метода стационарной фазы. Вторая глава посвящена методу ВКБ для обыкновенных дифференциальных уравнений в его простейшем ва-

рианте, а именно при отсутствии точек поворота. В качестве приложений получены коротковолновая асимптотика матрицы рассеяния (в одномерном случае), асимптотика собственных значений и собственных функций задачи Штурма — Лиувилля, коротковолновая асимптотика решений неоднородной задачи Штурма — Лиувилля. Глава III содержит метод решения уравнений в частных производных первого порядка, и в том числе уравнения Гамильтона — Якоби (§ 1—4). Поскольку подобные уравнения возникают при отыскании действия в квантово-механических задачах, фазы — в задачах распространения волн и т. д., то изложенные в этих параграфах результаты бывают совершенно необходимы при решении очень многих теоретических и прикладных задач. В конце главы дается метод нахождения характеристических поверхностей для линейных уравнений в частных производных высокого порядка.

Четвертая глава посвящена описанию распространения разрывов решений задачи Коши для уравнений и систем любого порядка, а также построению формальных асимптотических решений тех же задач с быстро осциллирующими начальными данными. Указанные задачи решаются в некоторой достаточно малой окрестности поверхности, на которой задаются начальные данные. Метод канонического оператора В. П. Маслова, позволяющий найти решение этих задач на любом компакте, излагается в пятой главе на двух простых примерах. В последнем параграфе главы коротко указан способ построения канонического оператора для более общих уравнений и систем.

Главы VI—XI образуют второй концентр книги. Хотя в главах VI—X обсуждаются вопросы, родственные тем, которые рассматривались в предыдущих главах, но формально главы VI—X не связаны с первой половиной книги (кроме ссылок на результаты из § 5 главы I). Глава XI существенно опирается на все предыдущие.

В главе VI дается обзор важнейших результатов теории эллиптических задач в ограниченной области. В главе VII изучаются эллиптические и гипоэллиптические уравнения и системы с постоянными коэффициентами в R^n. Найдены условия на бесконечности типа условий излучения, обеспечивающие однозначную разрешимость этих уравнений. Дано обоснование принципа предельного поглощения, позволяющего получать решения, выделяемые условиями излучения, предельным переходом из решений близких уравнений, однозначно разрешимых в пространстве $L_2(R^n)$. В главе VIII эти результаты переносятся на внешние задачи для эллиптических уравнений и систем с достаточно быстро стабилизирующимися на бесконечности коэффициентами.

В главах IX, X рассматриваются внешние эллиптические задачи, получающиеся из смешанных задач для гиперболических систем заменой оператора дифференцирования $i\partial/\partial t$ на спектральный параметр k. Изучены аналитические (по параметру k) свойст-

ва решений и, в частности, исследован вопрос о возможности аналитического продолжения решений через непрерывный спектр задачи. Получена коротковолновая ($|\mathrm{Re}\, k| \to \infty$) и длинноволновая ($k \to 0$) асимптотика решений. С помощью этих результатов получено асимптотическое разложение при $|x| < b < \infty$ и $t \to \infty$ решений внешних смешанных нестационарных задач с нулем в правой части уравнений и в граничных условиях и с начальными данными, имеющими компактный носитель. Из этого разложения, в частности, видно, какая часть энергии начального возмущения остается при $t \to \infty$ в ограниченной области и какая — уходит на бесконечность. Исследовано поведение при $t \to \infty$ решений внешних нестационарных задач с периодической по t правой частью, изучен вопрос о справедливости принципа предельной амплитуды. Отметим, что полученные в главах IX, X результаты покрывают все приложения к уравнениям математической физики, вытекающие из теории рассеяния Лакса — Филлипса.

В последней главе содержится вывод квазиклассической асимптотики решения задачи о рассеянии плоских волн на неоднородностях среды и квазиклассическая асимптотика амплитуды рассеяния.

Автор выражает благодарность Ю. Н. Протасу и М. Я. Спиридонову, прочитавшим книгу в рукописи и сделавшим ряд весьма полезных замечаний.

Глава I

МЕТОД СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ

§ 1. Об асимптотических разложениях

Пусть $x \in R^1$, и комплекснозначные функции f, g определены в некоторой окрестности точки $x_0 \in R^1$. Напомним, что формула $f(x) = O(g(x))$ при $x \to x_0$ означает существование такой окрестности U точки x_0 и такой константы C, что $g(x) \neq 0$ при $x \in U \setminus x_0$ и $|f(x)| < C|g(x)|$ при $x \in U \setminus x_0$. Аналогично формула $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$ означает, что $g(x) \neq 0$ при $x \in U \setminus x_0$ и $f(x)g^{-1}(x) \to 0$ при $x \to x_0$. В этих определениях допустимо, чтобы $x_0 = \pm\infty$.

Определение. *Последовательность* функций $\{\varphi_n\}$, определенных в некоторой окрестности точки x_0, *называется асимптотической* при $x \to x_0$, если при всех n и $x \to x_0$ справедливо соотношение $|\varphi_{n+1}(x)| = o(|\varphi_n(x)|)$.

Примеры. 1) $\varphi_n(x) = x^n$, $x \to 0$;

2) $\varphi_n(x) = x^{-\lambda_n}$, $x \to \infty$, где $\lambda_{n+1} > \lambda_n$;

3) $\varphi_n(x) = e^x x^{-\lambda_n}$, $x \to \infty$, где $\lambda_{n+1} > \lambda_n$.

Обычно почленное интегрирование асимптотических последовательностей дает асимптотические последовательности.

Задача. Проверьте, что если последовательность функций $\{\varphi_n\}$ асимптотическая при $x \to x_0$, функции φ_n вещественны, непрерывны и интегрируемы в некоторой окрестности U точки x_0, то последовательность функций $\left\{\int_{x_0}^{x} \varphi_n(\xi)\, d\xi\right\}$ асимптотическая при $x \to x_0$.

При почленном дифференцировании асимптотических последовательностей может получиться неасимптотическая последовательность. Пример. $\varphi_n(x) = x^n(2 + \cos x^{-2n})$, $x \to 0$.

Определение. *Формальный ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi_n$ *называется асимптотическим разложением* (или асимптотикой) функции f при $x \to x_0$, если последовательность $\{\varphi_n\}$ асимптотическая при $x \to x_0$ и

для любого $N<\infty$

$$f(x)-\sum_{n=0}^{N}\varphi_n(x)=O(\varphi_{N+1}(x)),\ x\to x_0.$$

Обозначается это так: $f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x),\ x\to x_0.$

Подчеркнем, что в этом определении ряд предполагается формальным, т. е. он не обязан сходиться. Смысл асимптотического разложения состоит в том, что оно позволяет изучить поведение функции f при $x\to x_0$. Обычно функции φ_n являются достаточно простыми, а, взяв сумму $\sum_{n=0}^{N}\varphi_n$, мы получаем некоторое приближение к функции f при $x\to x_0$, причем тем более точное, чем больше N.

Пример. Пусть $f\in C^\infty(R^1)$. Тогда одним из возможных разложений функции f при $x\to 0$ будет ее ряд Тейлора: $f(x)\sim$ $\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. Это просто другая форма записи теоремы Тейлора, согласно которой при любом N

$$f(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+O(x^{N+1}),\ x\to 0.$$

Напомним, что ряд Тейлора не обязан сходиться, а если он сходится, то необязательно к функции f.

Для одной и той же функции f можно написать сколько угодно асимптотических разложений. Конечно, если раскладывать f в степенной ряд (или в ряд по какой-нибудь другой фиксированной асимптотической последовательности), то коэффициенты ряда определятся однозначно. Но можно, например, для $f\in C^\infty(R^1)$ кроме формулы Тейлора написать следующее разложение при $x\to 0$:

$$f\sim\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n,\ \varphi_n(x)=\frac{x^{2n}}{(2n)!}\left(f^{(2n)}(0)+x\frac{f^{(2n+1)}(0)}{2n+1}\right).$$

И тут уже дело вкуса выбрать асимптотическое разложение так, чтобы функции φ_n были проще и малое число слагаемых давало хорошее приближение к f.

Еще один пример: ряд Тейлора для e^x, $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, является асимптотическим разложением для e^x при $x\to 0$, но не при $x\to\infty$,

хотя ряд сходится всюду. Это происходит потому, что при $x\to\infty$ последовательность $\left\{\frac{x^n}{n!}\right\}$ не является асимптотической. Именно поэтому конечное число слагаемых $\sum_{n=0}^{N}\frac{x^n}{n!}$ дает хорошее приближение для e^x в окрестности нуля, но не в окрестности бесконечности.

Задача. Пусть функции $\{\varphi_n\}$ удовлетворяют условиям, сформулированным в предыдущей задаче. Тогда если

$$f\sim\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n \text{ при } x\to x_0, \text{ то } \int_{x_0}^{x}f(\xi)\,d\xi\sim\sum_{n=0}^{\infty}\int_{x_0}^{x}\varphi_n(\xi)\,d\xi.$$

Дифференцировать почленно асимптотические разложения, вообще говоря, нельзя, даже если почленное дифференцирование соответствующих асимптотических последовательностей приводит к асимптотическим последовательностям. Например, если

$$f\in C^\infty(R^1) \text{ и } \psi(x)=f(x)+e^{-1/|x|}\cos e^{1/|x|^2},$$

то ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ является асимптотикой при $x\to 0$ как для функции f, так и для ψ. Однако почленно продифференцированный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}$ будет асимптотическим разложением при $x\to 0$ для функции f' и не будет — для функции ψ'.

Пусть Ω — область в R^m с координатами $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. В том случае, когда функция f зависит от параметра α, будут рассматриваться только такие ее асимптотические разложения при $x\to x_0$, которые равномерны по α. Чтобы не оговаривать этого каждый раз, мы введем соответствующее условие в определение.

Определение. Формальный ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(x, \alpha)$, $x\in U\subset R^1$, $\alpha\in\Omega$ *называется асимптотическим разложением функции* $f=f(x, \alpha)$, $x\in U$, $\alpha\in\Omega$ при $x\to x_0\in U$ и $\alpha\in\Omega$, если при каждом $\alpha\in\Omega$ последовательность функций $\{\varphi_n\}$ асимптотическая и для любого $N<\infty$ существует такая окрестность U' точки x_0 и такая не зависящая от α константа C_N, что при всех $\alpha\in\Omega$

$$\left|f(x, \alpha)-\sum_{n=0}^{N}\varphi_n(x, \alpha)\right|<C_N\,|\varphi_{N+1}(x, \alpha)|,\ x\in U'\diagdown x_0.$$

Наконец, заметим, что все введенные в этом параграфе понятия естественно переносятся на случай, когда $x=(x_1, \ldots, x_n)\in R^n$.

§ 2. Метод стационарной фазы

Очень большое количество теоретических и прикладных задач приводит к необходимости отыскивать асимптотику при $\lambda\to+\infty$ интеграла:

$$I(\lambda)=\int_a^b f(x)\,e^{i\lambda\varphi(x)}dx,\ \ f,\varphi\in C^\infty(R^1),\ \ \operatorname{Im}\varphi\equiv 0. \tag{1}$$

Если подынтегральная функция описывает какие-то колебания, то f — амплитуда, $\lambda\varphi$ — фаза. Обычно важно не значение фазы (тем более, что изменение ее на величину, кратную 2π, не меняет функцию), а частота колебаний $\lambda\varphi'(x)$. Значит, если $\lambda\to+\infty$ и $\varphi'\neq 0$, то изучаются высокочастотные колебания. Если $\operatorname{Im} f\equiv 0$, то $\operatorname{Re} I(\lambda)=\int_a^b f(x)\cos[\lambda\varphi(x)]\,dx$. График подынтегральной функции в этом случае изображен на рис. 1. Здесь тонкая линия соответствует графику функции f. Если x_1, x_2 — два соседних нуля функ-

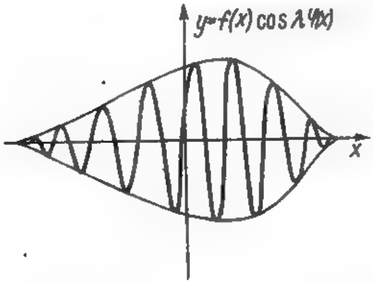

Рис. 1

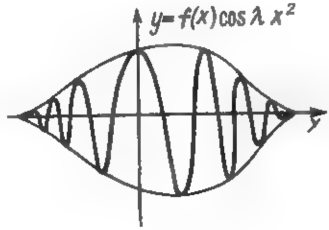

Рис. 2

ции $\cos[\lambda\varphi(x)]$, то $\lambda|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|=\pi$ и, значит, $|x_1-x_2|\approx\approx\pi/[\lambda|\varphi'(x_1)|]$, т. е., как уже было отмечено, величина $\lambda\varphi'(x)$ равна частоте колебаний. Довольно очевидно, что в рассматриваемой ситуации (когда $\varphi'(x)\neq 0$ и функция f имеет компактный носитель) площади, ограниченные «горбиками», лежащими над осью x и под ней, должны компенсировать друг друга, и интеграл от функции, изображенной на рис. 1, будет убывать при $\lambda\to+\infty$ быстрее, чем λ^{-1}. Ниже мы покажем строго, что он убывает быстрее λ^{-N} при любом N.

В качестве примера ситуации, в которой $\varphi'(x)$ может обращаться в нуль, рассмотрим интеграл $\int f(x)\cos\lambda x^2dx$, $f\in C_0^\infty(R^1)$, $\operatorname{Im} f\equiv 0$. Подынтегральная функция в этом случае изображена на рис. 2. Легко проверить, что ширина «горбика», основание которого содержит начало координат, равна $\sqrt{2\pi/\lambda}$ и его площадь не

компенсируется площадью соседей. Поэтому, опираясь только на эту картинку, можно доказать, что последний интеграл ведет себя при $\lambda \to +\infty$ как $C/\sqrt{\lambda}$.

Перейдем к строгим рассуждениям. Через $O(\lambda^{-\infty})$, $\lambda \to \infty$ будем обозначать функции $\psi = \psi(\lambda)$, такие, что $\psi(\lambda) = O(\lambda^{-N})$, $\lambda \to \infty$ для любого $N < \infty$.

Теорема 1. *Пусть $I(\lambda)$ имеет вид (1), где $f \in C_0^\infty([a, b])$ и $\varphi'(x) \neq 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$. Тогда $d^j I(\lambda)/d\lambda^j = O(\lambda^{-\infty})$, $\lambda \to \infty$ при любом $j \geqslant 0$.*

Доказательство. Интегрируя по частям, получаем

$$I(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_a^b \frac{f(x)}{i\varphi'(x)} \lambda i\varphi'(x) e^{i\lambda\varphi(x)} dx = \frac{-1}{\lambda} \int_a^b f_1(x) e^{i\lambda\varphi(x)} dx,$$

$$f_1 = \left(\frac{f}{i\varphi'}\right)' \in C_0^\infty([a, b]).$$

Полученный интеграл можно тем же приемом проинтегрировать по частям. Повторив эту процедуру N раз, получим

$$I(\lambda) = \left(\frac{-1}{\lambda}\right)^N \int_a^b f_N(x) e^{i\lambda\varphi(x)} dx, \quad f_N \in C_0^\infty([a, b]).$$

Значит, $|I(\lambda)| \leqslant C_N |\lambda|^{-N}$, т. е. $I(\lambda) = O(\lambda^{-\infty})$ при $\lambda \to \infty$. Те же рассуждения справедливы и для $d^j I(\lambda)/d\lambda^j$, если производную предварительно внести под знак интеграла. ■

Определение. Точка $x_0 \in R^1$, в которой $\varphi'(x_0) = 0$, называется *точкой стационарной фазы*. Она называется *невырожденной*, если $\varphi''(x_0) \neq 0$.

Теорема 2. *Пусть $I(\lambda)$ имеет вид (1), где $f \in C_0^\infty([a, b])$ и функция φ имеет при $a \leqslant x \leqslant b$ только одну стационарную точку $x = x_0$, причем невырожденную, и $a < x_0 < b$. Тогда при $\lambda \to +\infty$*

$$I(\lambda) \sim e^{i\lambda\varphi(x_0)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-1/2-k}, \tag{2}$$

где

$$a_0 = f(x_0) \sqrt{\frac{2\pi}{|\varphi''(x_0)|}} \, e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sign} \varphi''(x_0)}, \tag{3}$$

все коэффициенты a_k, $k \geqslant 1$, выражаются через значения функций f, φ и их производных порядка не выше $2k$ в точке $x = x_0$. Соотношение (2) *можно любое число раз дифференцировать почленно по λ.*

Доказательство. Пусть сначала $\varphi''(x_0) > 0$. Возьмем произвольную функцию $h \in C_0^\infty([a, b])$, такую, что $h(x) = 1$ при $|x - x_0| < \delta/2$ и $h(x) = 0$ при $|x - x_0| > \delta$. Константа δ будет выбра-

на ниже. Тогда при любом $j\geqslant 0$ и $\lambda\to+\infty$

$$\frac{d^j}{d\lambda^j}\int\limits_a^b [1-h(x)]\,f(x)\,e^{i\lambda\varphi(x)}dx=O(\lambda^{-\infty}). \qquad (4)$$

Для доказательства надо представить последний интеграл в виде суммы интегралов по отрезкам $[a,\ x_0-\delta/2]$ и $[x_0+\delta/2,\ b]$ и воспользоваться теоремой 1. Значит, утверждение теоремы 2 достаточно доказать для интеграла

$$I_1(\lambda)=\int\limits_a^b h(x)\,f(x)\,e^{i\lambda\varphi(x)}\,dx=e^{i\lambda\varphi(x_0)}\int\limits_a^b h(x)\,f(x)\,e^{i\lambda\psi(x)}\,dx,$$

где

$$\psi(x)=\varphi(x)-\varphi(x_0)=\frac{\varphi''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+O(|x-x_0|^3),\ \ x\to x_0. \qquad (5)$$

Из (5) следует существование в окрестности точки $x=x_0$ такой невырожденной замены переменной $x=x(t)$, при которой x_0 переходит в точку $t=0$ и $\psi(x(t))=t^2$. Действительно, $g(x)\equiv\equiv\psi(x)(x-x_0)^{-2}\in C^\infty$ и $g(x_0)=\varphi''(x_0)/2$. Значит, указанную замену переменных можно определить равенством $t=(x-x_0)\sqrt{g(x)}$. Так как $t'_x(x_0)=\sqrt{\varphi''(x_0)/2}\neq 0$, то замена переменных будет невырождена в некоторой окрестности точки $x=x_0$. Константу δ выберем так, чтобы отрезок $|x-x_0|\leqslant\delta$ лежал в этой окрестности. Тогда

$$I_1(\lambda)=e^{i\lambda\varphi(x_0)}I_2(\lambda),\ \ I_2(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x(t))\,f(x(t))\,D(t)\,e^{i\lambda t^2}dt,$$

где $D(t)=x'_t(t)\in C^\infty$ и $D(0)=\sqrt{2/\varphi''(x_0)}$. Последний интеграл запишем в виде

$$I_2(\lambda)=\int\limits_0^\infty q(t)\,e^{i\lambda t^2}dt, \qquad (6)$$

$$q(t)=h(x(t))\,f(x(t))\,D(t)+h(x(-t))\,f(x(-t))\,D(-t).$$

Пусть $f(x(t))\,D(t)\sim\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kt^k,\ t\to 0,$ — разложение функции fD в ряд Тейлора. Тогда поскольку $h=1$ в окрестности точки $x=x_0$, то

$$q(t)\sim 2\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k}t^{2k},\ \ t\to 0. \qquad (7)$$

В интеграле (6) произведем интегрирование по частям. Пусть $j\geqslant 1$ и

$$\psi_j(\lambda,t)=\int\limits_{l_t}\frac{(t-z)^{j-1}}{(j-1)!}\,e^{i\lambda z^2}dz,\ \ t\geqslant 0,$$

где l_t — контур в комплексной плоскости z, изображенный на рис. 3. Очевидно, функция ψ_j является первообразной порядка j для $\exp(i\lambda t^2)$. От других первообразных (например, от аналогичного интеграла по отрезку $[0, t]$ вещественной оси) она отличается тем, что достаточно быстро убывает при $\lambda\to+\infty$. Действительно, если $z=t+\rho\exp(i\pi/4)$, то

$$\psi_j(\lambda, t) = \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} e^{i\frac{\pi}{4}j} \int\limits_{\infty}^{0} \rho^{j-1} e^{i\lambda[t^2+2t\rho e^{i\pi/4}+i\rho^2]}\, d\rho, \tag{8}$$

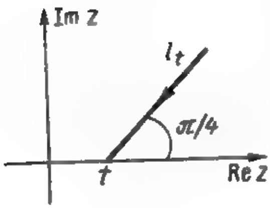

Рис. 3

и при $t>0$

$$|\psi_j(\lambda, t)| \leqslant \frac{1}{(j-1)!} \int\limits_0^\infty \rho^{j-1} e^{\lambda(-\sqrt{2}t\rho-\rho^2)}\, d\rho \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(j-1)!} \int\limits_0^\infty \rho^{j-1} e^{-\lambda\rho^2}\, d\rho.$$

Сделав замену $\sqrt{\lambda}\rho=\xi$, получим

$$|\psi_j(\lambda, t)| \leqslant C_j \lambda^{-j/2},\ t\geqslant 0. \tag{9}$$

Это вместе с формулой (6) дает нам при $\lambda\to+\infty$

$$I_2(\lambda) = \sum_{j=1}^{2N+2} (-1)^{j-1} q_t^{(j-1)}(t)\, \psi_j(\lambda, t)\,|_0^\infty + O(\lambda^{-N-1}). \tag{10}$$

Так как $h\in C_0^\infty(R^1)$, то $q(t)=0$ при $t\gg 1$. Таким образом, из (7) и (10) получаем следующее равенство:

$$I_2(\lambda) = -\sum_{k=0}^{N} 2\,(2k)!\, c_{2k}\psi_{2k+1}(\lambda, 0) + O(\lambda^{-N-1}).$$

Положив в формуле (8) $t=0$ и сделав замену $\lambda\rho^2=\xi$, получим

$$\psi_{2k+1}(\lambda, 0) = -\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)\frac{1}{(2k)!} e^{i\frac{\pi}{4}(2k+1)} \lambda^{-1/2-k}, \tag{11}$$

где $\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right)$ — гамма-функция. Значит,

$$I_2(\lambda) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) e^{i\frac{\pi}{4}(2k+1)} c_{2k}\lambda^{-1/2-k},\ \lambda\to+\infty. \tag{12}$$

Это приводит к формуле (2) для $I_1(\lambda)$ и, значит, для $I(\lambda)$. Легко проверяются утверждения теоремы 2 о коэффициентах a_k.

В силу (4) для доказательства возможности почленного дифференцирования соотношения (2) достаточно доказать возможность почленного дифференцирования соотношения (12). Для этого

дифференцируем равенство (6):

$$\frac{d^j}{d\lambda^j} I_2(\lambda) = \int_0^\infty q_j(t)\, e^{i\lambda t^2}\, dt, \quad q_j(t) = (it^2)^j\, q(t). \tag{13}$$

Затем так же, как из (6) было получено (12), получаем асимптотическое разложение для интеграла (13). После этого непосредственно проверяется, что полученное асимптотическое разложение совпадает с разложением, получаемым почленным дифференцированием соотношения (12). Последнее делается совсем просто, надо только заметить, что вместо (7) теперь справедлива формула

$$q_j(t) \sim 2\,(i)^j \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} t^{2k+2j}, \quad t \to 0,$$

и, значит, для $d^j I_2(\lambda)/d\lambda^j$ будет справедливо разложение (12), в котором вместе c_{2k} стоит c'_{2k}, где $c'_{2k}=0$ при $k<j$ и $c'_{2k}=(i)^j c_{2(k-j)}$ при $k \geqslant j$. Теорема 2 в случае $\varphi''(x_0)>0$ доказана.

В случае $\varphi''(x_0)<0$ можно перейти от $I(\lambda)$ к $\overline{I(\lambda)}$ и, получив для $\overline{I(\lambda)}$ асимптотическое разложение, затем перейти еще раз к комплексно сопряженным функциям. ■

Пусть, как и прежде,

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x)\, e^{i\lambda\varphi(x)}\, dx, \quad \operatorname{Im}\varphi \equiv 0, \tag{14}$$

а M — множество, состоящее из точек, в которых функция f или φ не бесконечно дифференцируема, из точек стационарной фазы и концов интегрирования.

Определение. *Нейтрализатором в точке* x_0 называется бесконечно дифференцируемая функция $h_{x_0} = h_{x_0}(x)$, равная единице в некоторой окрестности точки $x=x_0$ и нулю вне некоторой большей окрестности. *Вкладом точки* $x_s \in M$ *в интеграл* $I(\lambda)$ называется интеграл

$$I_s(\lambda) = \int_a^b h_{x_s}(x)\, f(x)\, e^{i\lambda\varphi(x)}\, dx,$$

если носитель функции h_{x_s} не содержит точек M, отличных от x_s.

Следующее утверждение позволяет разделить трудности при отыскании асимптотики интеграла $I(\lambda)$, если множество M состоит из конечного числа точек $x=x_s$, $1 \leqslant s \leqslant l$.

Теорема 3. *С точностью до слагаемого порядка* $O(\lambda^{-\infty})$ *интеграл* (14) *равен сумме вкладов стационарных точек, концов интегрирования и особенностей подынтегрального выражения, т. е.*

$$I(\lambda) = \sum_{j=1}^{l} I_j(\lambda) + O(\lambda^{-\infty}), \quad \lambda \to \infty.$$

Это разложение можно дифференцировать по λ.

Доказательство. Утверждение теоремы получается, если к интегралу

$$I(\lambda)-\sum_{j=1}^{l} I_j(\lambda) = \int_a^b \Big[1-\sum_{j=1}^{l} h_{x_j}(x)\Big] f(x)\, e^{i\lambda\varphi(x)}\, dx$$

применить теорему 1 (см. формулу (4)). ■

Вклад от концов интегрирования дается следующей теоремой.

Теорема 4. *Пусть* $I(\lambda)$ *имеет вид* (1) *и* $\varphi'(x)\neq 0$ *при* $x\in[a, b]$. *Тогда при* $\lambda\to\infty$

$$I(\lambda)\sim\sum_{k=0}^{\infty} c_k(b)\, e^{i\lambda\varphi(b)}\lambda^{-1-k}-\sum_{k=0}^{\infty} c_k(a)\, e^{i\lambda\varphi(a)}\lambda^{-1-k}, \tag{15}$$

где

$$c_k(x)=\left(\frac{1}{-i\,\varphi'(x)}\,\frac{d}{dx}\right)^k\left(\frac{f(x)}{i\varphi'(x)}\right).$$

Соотношение (15) *можно любое число раз дифференцировать почленно по* λ.

Доказательство. Первое утверждение доказывается интегрированием по частям точно так же, как доказывалась теорема 1. Возможность почленного дифференцирования доказывается точно так же, как и аналогичное утверждение в теореме 2. ■

Пусть теперь подынтегральные функции в (1) зависят еще от дополнительного параметра $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)\in\bar\Omega$, где $\bar\Omega$ — замыкание некоторой ограниченной области в R^m (или гладкое компактное m-мерное многообразие):

$$I(\lambda, \alpha)=\int_a^b f(x, \alpha)\, e^{i\lambda\varphi(x, \alpha)}\, dx, \quad f, \varphi\in C^\infty(R^1\times\bar\Omega), \ \operatorname{Im}\varphi\equiv 0. \tag{16}$$

Теорема 5. *Пусть условия теорем 1, 2, 4 выполнены для интеграла (16) при каждом* $\alpha\in\bar\Omega$. *Тогда асимптотические разложения, полученные в этих теоремах, будут равномерными по* α *и будут допускать почленное дифференцирование любое число раз по* λ *и* α.

Доказательство. При доказательстве асимптотических разложений интегралов, исследуемых в теоремах 1, 2, 4, остаточные члены оцениваются с помощью оценки интегралов через максимум модуля подынтегрального выражения. Поэтому равномерность по α этих разложений очевидна. Надо только дополнительно заметить, что не только функции f и φ являются бесконечно дифференцируемыми функциями своих аргументов, но и точка стационарной фазы $x_0=x_0(\alpha)$ является бесконечно дифференцируемой функцией α. Последнее является следствием того, что требование невырожденности точки стационарной фазы обеспечивает применимость к уравнению $\varphi'_x(x, \alpha)=0$, определяющему $x_0(\alpha)$, теоремы о неявной функции. Возможность дифференцировать указанные

асимптотические разложения по α доказывается так же, как и возможность дифференцировать их по λ (см. доказательство теоремы 2). ■

§ 3. Метод стационарной фазы. Многомерный случай

Пусть теперь $x \in R^n$, а α и $\overline{\Omega}$ — те же, что и в формуле (16). Пусть

$$I(\lambda, \alpha) = \int_{R^n} f(x, \alpha)\, e^{i\lambda\varphi(x,\alpha)}\, dx, \quad f, \varphi \in C^\infty (R^n \times \overline{\Omega}), \quad \operatorname{Im} \varphi \equiv 0, \tag{17}$$

и существует некоторая ограниченная область $D \subset R^n$, такая, что $f(x, \alpha) = 0$ при $x \in R^n \setminus D$.

Теорема 6. *Пусть выполнены указанные выше условия на функции f, φ и $\nabla_x \varphi \neq 0$ при $x \in \overline{D}$. Тогда*

$$I(\lambda, \alpha) = O(\lambda^{-\infty}), \quad \lambda \to \infty,$$

равномерно по $\alpha \in \Omega$. Аналогичное утверждение справедливо для всех производных от I по переменным λ и α.

Доказательство. Обозначим через L дифференциальный оператор:

$$L = \sum_{j=1}^{n} \left(|\nabla_x \varphi|^{-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

и через L^* — формально сопряженный к нему оператор:

$$L^* u = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u\, |\nabla_x \varphi|^{-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right).$$

Очевидно, $L(e^{i\lambda\varphi}) = i\lambda e^{i\lambda\varphi}$. Поэтому

$$I = \frac{1}{i\lambda} \int_{R^n} f L(e^{i\lambda\varphi})\, dx = \frac{1}{i\lambda} \int_{R^n} (L^* f)\, e^{i\lambda\varphi}\, dx.$$

Повторив эту процедуру N раз и оценив затем полученный интеграл через максимум модуля подынтегрального выражения, получим утверждение теоремы 6 о функции I. Те же рассуждения справедливы и для производных от I, если предварительно внести их под знак интеграла. ■

Определение. Точка $x_0 \in R^n$ называется *точкой стационарной фазы*, если $\nabla_x \varphi|_{x=x_0} = 0$. Через φ''_{xx} будем обозначать матрицу $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right)$, через $\operatorname{sign} \varphi''_{xx}$ — разность между числом ее положительных и отрицательных собственных значений. Точка стационарной фазы называется *невырожденной*, если $\det \varphi''_{xx}|_{x=x_0} \neq 0$.

Теорема 7. *Пусть при каждом $\alpha \in \overline{\Omega}$ в $\overline{D}$ имеется ровно одна точка стационарной фазы $x = x_0(\alpha)$, причем она невырожденная и лежит строго внутри области D. Тогда $x_0(\alpha) \in C^\infty(\overline{\Omega})$, и при $\lambda \to +\infty$*

$$I(\lambda, \alpha) \sim e^{i\lambda\varphi(x_0(\alpha), \alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\alpha) \lambda^{-\frac{n}{2}-k},$$

где

$$a_0(\alpha) = \frac{f(x_0(\alpha),\ \alpha)(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{|\det \varphi''_{xx}(x_0(\alpha),\ \alpha)|}} e^{i\frac{\pi}{4}\operatorname{sign}\varphi''_{xx}(x_0(\alpha), \alpha)}.$$

Это разложение допускает почленное дифференцирование любое число раз по λ и α, и все получающиеся при этом разложения равномерны по α.

Доказательство. Условие невырожденности точки стационарной фазы позволяет применить к системе $\nabla_x\varphi(x, \alpha) = 0$ относительно неизвестных $x = (x_1, \ldots, x_n)$ теорему о неявной функции. Значит, $x_0(\alpha) \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Дальше без ограничения общности можно считать, что $x_0(\alpha) \equiv 0$. К этому случаю можно всегда перейти с помощью замены $x - x_0(\alpha) \to x$.

Разлагая функцию φ в окрестности стационарной точки в ряд Тейлора, получим, что при $|x| \to 0$

$$\varphi(x, \alpha) = \varphi(0, \alpha) + \frac{1}{2}\langle \varphi''_{xx}(0, \alpha)x, x\rangle + O(|x|^3).$$

Обозначим через $\mu_i(\alpha)$ собственные значения матрицы $\varphi''_{xx}(0, \alpha)$. В силу леммы Морса [81] в некоторой окрестности $U_\delta = \{x : |x| < \delta\}$ точки $x = 0$ существует невырожденная замена переменных $y = y(x, \alpha)$, переводящая точку $x = 0$ в $y = 0$ и такая, что $y(x, \alpha) \in C^\infty(U_\delta \times \overline{\Omega})$, $\left|\frac{D(y)}{D(x)}\right|\Big|_{x=0} = 1$ и в новых переменных функция φ равна

$$\varphi(0, \alpha) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \mu_j(\alpha) y_j^2.$$

Пусть теперь $h(x) \in C^\infty(R^n)$, $h(x) = 1$ при $|x| < \delta/2$ и $h(x) = 0$ при $|x| > \delta$. Тогда в силу теоремы 6

$$\int_{R^n} (1 - h) f e^{i\lambda\varphi}\, dx = O(\lambda^{-\infty}),\ \lambda \to \infty,$$

и аналогичное утверждение справедливо для всех производных от этого интеграла по λ и α. Значит, утверждение теоремы 7 достаточно доказать для интеграла:

$$\int_{R^n} h f e^{i\lambda\varphi}\, dx = e^{i\lambda\varphi(0,\alpha)} \int_{R^n} (hfD)(x(y, \alpha), \alpha)\, e^{i\lambda\sum\frac{1}{2}\mu_j(\alpha) y_j^2}\, dy,$$

где $D=\left|\frac{D(x)}{D(y)}\right|$ — модуль якобиана замены. Утверждение теоремы 7 получится, если последний интеграл записать в виде повторного и при вычислении интегралов по переменным y_j последовательно к каждому интегралу применять теоремы 2, 5. ■

§ 4. Задача о волнах на поверхности жидкости

В этом параграфе в качестве примера применения метода стационарной фазы будет проведено асимптотическое исследование решения двумерной линейной задачи о волнах на поверхности жидкости. Напомним постановку задачи.

Пусть R^2 — двумерное пространство с координатами (x, y), D_t — область в R^2, занимаемая жидкостью. Эта область зависит от времени. Мы остановимся только на случае $D_t=\{(x, y): -\infty<y<\eta(x, t),\ -\infty<x<\infty\}$. Здесь $y=\eta(x, t)$ — уравнение свободной поверхности слоя жидкости.

Задача состоит в отыскании поля скоростей (u, v) в области D_t. Предполагается, что массовая сила состоит только из силы тяжести. Уравнения движения имеют в этом случае вид [103]

$$\begin{cases} u_t' + u\cdot u_x' + v\cdot u_y' = -\dfrac{1}{\rho}p_x', \\ v_t' + u\cdot v_x' + v\cdot v_y' = -\dfrac{1}{\rho}p_y' - g, \end{cases} \tag{18}$$

где p — давление, ρ — плотность, g — ускорение свободного падения. Так как жидкость несжимаема, то $\rho=\text{const}$. К этим уравнениям надо добавить еще уравнение неразрывности [103]:

$$u'_x+v'_y=0. \tag{19}$$

Получаем систему из трех уравнений для определения неизвестных функций (u, v, p).

Движение жидкости называется безвихревым, если $u'_y-v'_x=0$. Мы будем изучать только такие движения.

Лемма 1. *Если движение жидкости является безвихревым в начальный момент, то оно является таким и во все последующие времена.*

Доказательство. Перепишем систему (18) в виде

$$\begin{cases} u_t' + \left[\dfrac{1}{2}(u^2+v^2)+\dfrac{p}{\rho}+gy\right]_x' + vR = 0, \\ v_t' + \left[\dfrac{1}{2}(u^2+v^2)+\dfrac{p}{\rho}+gy\right]_y' - uR = 0, \end{cases} \tag{20}$$

где через $R=R(x, y, t)$ обозначена функция $u'_y-v'_x$. Продифференцируем первое уравнение по y, второе — по x и вычтем одно

из другого. Тогда, учитывая (19), получим для R уравнение

$$R'_t+vR'_y+uR'_x=0. \tag{21}$$

Предполагается, что область D_t получается из области D_0 сдвигом вдоль траекторий поля скоростей (u, v). Пусть $x=x(t)$, $y=y(t)$ — одна из таких траекторий. Тогда уравнение (21) приводит к тому, что $\frac{d}{dt}R(x(t), y(t), t)\equiv 0$. Вместе с начальным условием это означает, что $R(x(t), y(t), t)\equiv 0$. А так как в каждую точку $(x, y)\in D_t$ приходит какая-то из траекторий, то $R(x, y, t)\equiv 0$. ■

Заметим, что приведенное рассуждение справедливо для любого потенциального поля сил. Из леммы 1 вытекают два следствия. Обозначим через ∇ вектор $(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$, через Δ — оператор $\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$.

Следствие 1. В случае безвихревого движения существует потенциал скоростей, т. е. функция $\Phi=\Phi(x, y, t)$, такая, что $(u, v)=\nabla\Phi$. Функция Φ определяется с точностью до слагаемого $\Psi=\Psi(t)$.

Следствие 2. В случае безвихревого движения существует интеграл Коши — Лагранжа, т. е. для любых решений системы (18), (19) справедливо соотношение

$$\Phi'_t+\frac{1}{2}(u^2+v^2)+\frac{p}{\rho}+gy=C(t). \tag{22}$$

При этом потенциал скоростей можно выбрать так, чтобы $C(t)\equiv 0$.

Доказательство. Обозначим левую часть в (22) через L. Тогда из (20) и условия $R\equiv 0$ следует, что $\nabla L\equiv 0$, т. е. $L=C(t)$. Взяв произвольно потенциал Φ и добавив к нему функцию $\Psi(t)=$ $=\int C(t)\,dt$, получим потенциал скоростей, для которого справедливо соотношение (22) с $C(t)\equiv 0$. ■

Окончательно, в случае безвихревого движения задача сводится к отысканию потенциала скоростей Φ.

Под потенциалом скоростей мы будем понимать тот из потенциалов, для которого правая часть в (22) тождественно равна нулю. Подчеркнем еще раз, что от выбора потенциала поле скоростей не зависит. Для определения Φ получаем следующую задачу:

$$\Delta\Phi=0, \quad -\infty<y<\eta(x, t). \tag{23}$$

Граничные условия на свободной поверхности $y=\eta(x, t)$:

$$\Phi'_x\eta'_x-\Phi'_y+\eta'_t=0,\ \Phi'_t+\frac{1}{2}(\Phi'^2_x+\Phi'^2_y)+\frac{p}{\rho}+g\eta=0. \tag{24}$$

Условие на бесконечности:

$$\Phi'_y\to 0 \text{ при } y\to-\infty. \tag{25}$$

Начальные условия:

$$\Phi(x, \eta, 0)=\Phi^0(x),\ \eta(x, 0)=\eta^0(x). \tag{26}$$

Действительно, уравнение (23) получится, если вектор $(u, v) = \nabla\Phi$ подставить в (19). Далее, если граница S жидкости задается уравнением $s(x, y, t)=0$, то на S должно выполняться соотношение

$$\frac{ds}{dt} = s'_x u + s'_y v + s'_t = 0. \tag{27}$$

Оно носит название условия непротекания. В частности, если граница неподвижна, т. е. $s'_t=0$, то условие (27) означает, что вектор скорости (u, v) направлен по касательной к границе. Если бы слой жидкости кончался на глубине $y=-H$, то из (27) следовало бы, что $\Phi'_y=0$ при $y=-H$. Устремляя H к бесконечности, получаем условие (25). Первое из условий (24) также является прямым следствием (27). Второе из условий (24) следует из (22).

На свободной поверхности заданы два граничных условия. Это не удивительно, поскольку эти условия содержат дополнительную неизвестную функцию η. Давление p на свободной поверхности считается известным.

Мы остановимся дальше только на линеаризованной задаче, которая получится, если предположить, что все скорости и возвышение свободной поверхности малы. Точнее, пусть

$$\Phi=\varepsilon\Phi_1+\varepsilon^2\Phi_2+\ldots, \quad \eta=\varepsilon\eta_1+\varepsilon^2\eta_2+\ldots. \tag{28}$$

Тогда из (23)—(26) следует, что

$$\Delta\Phi_1=0, \quad y<0; \tag{29}$$

$$-\Phi'_{1_y}+\eta'_{1_t}=0, \ \Phi'_{1_t}+\frac{p}{\rho}+g\eta_1=0, \ \ y=0; \tag{30}$$

$$\lim_{y\to-\infty}\Phi'_{1_y}=0; \tag{31}$$

$$\Phi_1(x, 0, 0)=\Phi_1^0(x), \quad \eta_1(x, 0)=\eta_1^0(x). \tag{32}$$

Заметим, что задача (29)—(32) отличается от (23)—(26) не только тем, что в ней выброшены все квадратичные члены, но и тем, что вместо области D_t теперь рассматривается полупространство $y<0$. В силу (28) область D_t зависит от ε, и, для того чтобы линеаризовать задачу (23)—(26), надо предварительно сделать замену переменных $(x, y)\to(x, z)$, $z=y-\eta(x, t)$. В новых переменных область D_t перейдет в полупространство $z<0$, операторы $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ перейдут соответственно в $\frac{\partial}{\partial x}-(\varepsilon\eta_1+\varepsilon^2\eta_2+\ldots)\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$.

Если функции $\Phi_i(x, y)=\Phi_i(x, z+\eta)$ разложить в ряд Тейлора в точке z по второму аргументу и, воспользовавшись разложениями (28), собрать вместе члены при одинаковых степенях ε, то мы получим формальный ряд:

$$\Phi(x, y)=\varepsilon\widetilde{\Phi}_1(x, z)+\varepsilon^2\widetilde{\Phi}_2(x, z)+\ldots, \tag{33}$$

в котором $\ddot{\Phi}_1(x, z) = \Phi_1(x, z)$. Подставим теперь второе из разложений (28) и (33) в (23)—(26) и оставим в соответствующих равенствах только старшие члены по ε. Если теперь переменную z обозначить через y, получим равенства (29)—(32).

Далее, можно считать, что $p = p_0 = \mathrm{const}$ на свободной поверхности. Тогда, перейдя от потенциала Φ_1 к $\Phi = \Phi_1 + \frac{p_0}{\rho} t$, избавимся от слагаемого p/ρ в формуле (30). Затем, продифференцировав второе из уравнений (30) по t, исключим из уравнений (30) функцию η_1. В условиях (32) также заменим η_1 с помощью равенства (30). Окончательно получим для потенциала Φ следующую задачу:

$$\Delta\Phi = 0, \quad y < 0; \tag{34}$$

$$\Phi''_{tt} + g\Phi'_y = 0, \quad y = 0; \tag{35}$$

$$\lim_{y \to -\infty} \Phi'_y = 0; \tag{36}$$

$$\Phi(x, 0, 0) = 0, \quad \Phi'_t(x, 0, 0) = c\delta(x), \tag{37}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция, $c = \mathrm{const}$. Мы считаем, что в начальный момент потенциал скоростей равен нулю, а возвышение свободной поверхности дельта-образно.

Теорема 8. *При $y = 0$ и $\lambda = \frac{gt^2}{|x|} \to \infty$ решение Φ задачи* (34)—(37) *имеет следующий вид*:

$$\Phi(x, 0, t) = \frac{ct}{\sqrt{\pi}\,|x|}\left[\sqrt{\frac{|x|}{gt^2}} \sin\left(\frac{gt^2}{4|x|} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{|x|}{gt^2}\right)\right], \tag{38}$$

где для второго слагаемого в правой части формулы (38) *при всех $j > 0$ справедлива оценка: $\frac{d^j}{d\lambda^j} O(\lambda^{-1}) = O(\lambda^{-1})$ при $\lambda \to \infty$.*

Доказательство. После преобразования Фурье по x задача (34)—(37) явно решается. Получаем, что образ Фурье $\tilde{\Phi}(\sigma, y, t)$ функции Φ равен $\tilde{\Phi} = ce^{|\sigma| y} \frac{\sin\sqrt{g|\sigma|}\, t}{\sqrt{g|\sigma|}}$. Значит,

$$\Phi = \frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{|\sigma| y} \frac{\sin\sqrt{g|\sigma|}\, t}{\sqrt{g|\sigma|}} e^{-i\sigma x}\, d\sigma.$$

Так как функция $\tilde{\Phi}$ четна по переменной σ, то этот интеграл можно переписать в виде

$$\Phi = \frac{c}{\pi} \int_0^{\infty} e^{\sigma y} \frac{\sin\sqrt{g\sigma}\, t}{\sqrt{g\sigma}} \cos\sigma x\, d\sigma.$$

Подынтегральная функция не изменится, если заменить в ней x на $|x|$. Положив еще $y=0$ и сделав замену переменных $\sqrt{\sigma/g}=s$, получим

$$\Phi(x, 0, t) = \frac{2c}{\pi}\int_0^\infty \sin(gst)\cos(gs^2|x|)\,ds =$$

$$= \frac{c}{\pi}\int_0^\infty \sin(gst + gs^2|x|)\,ds + \frac{c}{\pi}\int_0^\infty \sin(gst - gs^2|x|)\,ds =$$

$$= \frac{c}{\pi}\operatorname{Im}\left[\int_0^\infty e^{ig(st+s^2|x|)}\,ds + \int_0^\infty e^{ig(st-s^2|x|)}\,ds\right].$$

Сделаем теперь замену переменных $s=t^\alpha|x|^\beta\xi$ и подберем α и β так, чтобы уравнять порядки по t и x слагаемых в показателях экспонент. Очевидно, для этого надо взять $\alpha=1$, $\beta=-1$. Получим

$$\Phi(x, 0, t) = \frac{ct}{\pi|x|}\operatorname{Im}\left[\int_0^\infty e^{i\lambda(\xi+\xi^2)}\,d\xi + \int_0^\infty e^{i\lambda(\xi-\xi^2)}\,d\xi\right]. \qquad (39)$$

Применим к интегралам (39) метод стационарной фазы. У подынтегральной функции в первом интеграле нет точек стационарной фазы при $\xi>0$. Во втором интеграле такая точка одна: $\xi=1/2$. Поскольку интегралы (39) имеют бесконечные пределы, необходимо вычислить вклад от бесконечности. Для этого зафиксируем какую-нибудь функцию $h\in C^\infty(R^1)$, такую, что $h(\xi)=0$ при $\xi<1$ и $h(\xi)=1$ при $\xi>2$. Тогда

$$I \equiv \int_0^\infty h(\xi)\,e^{i\lambda(\xi+\xi^2)}\,d\xi = \int_0^\infty \frac{h(\xi)}{i\lambda(1+2\xi)}\,i\lambda(1+2\xi)\,e^{i\lambda(\xi+\xi^2)}\,d\xi =$$

$$= \frac{h(\xi)}{i\lambda(1+2\xi)}\,e^{i\lambda(\xi+\xi^2)}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(\frac{h(\xi)}{i\lambda(1+2\xi)}\right)' e^{i\lambda(\xi+\xi^2)}\,d\xi.$$

Внеинтегральный член равен нулю, так как $(1+2\xi)^{-1}\to 0$ при $\xi\to\infty$ и $h(0)=0$. Если этот прием интегрирования по частям повторить N раз, то получим, что

$$I = \int_0^\infty h(\xi)\,e^{i\lambda(\xi+\xi^2)}\,d\xi = \lambda^{-N}\int_0^\infty f_N(\xi)\,e^{i\lambda(\xi+\xi^2)}\,d\xi.$$

Существенно при этом, что при $N\geqslant 1$ функции f_N и $f'_{N\xi}$ ведут себя как $O(\xi^{-2N})$ при $\xi\to\infty$. Поэтому внеинтегральные члены все время будут обращаться в нуль и, кроме того, f_N будет суммируе-

ма при $N \gg 1$. Но тогда последний интеграл не превосходит $C_N \lambda^{-N}$. Также доказывается, что $|d^j I/d\lambda^j| < C_{N,j} \lambda^{-N}$. Для этого надо сначала проинтегрировать, как и выше, по частям $N+j$ раз, после чего, дифференцируя по λ, внести производные под знак интеграла. Таким образом, $d^j I/d\lambda^j = O(\lambda^{-\infty})$ при $\lambda \to \infty$. Аналогично исследуется вклад от бесконечности для второго слагаемого в правой части формулы (39). Остается с помощью теорем 2—4 учесть для интегралов (39) вклад от концов интегрирования и от точки стационарной фазы. Получим в точности утверждение теоремы 8. ■

Из теоремы 8 вытекает

Следствие. Поскольку в силу второго из условий (30) возвышение η свободной поверхности жидкости равно $-\frac{1}{g} \Phi'_t(x, 0, t)$, то из теоремы 8 следует, что фаза φ колебаний свободной поверхности, вызванных точечным возмущением, равна $\varphi = (\lambda + \pi)/4$, $\lambda = gt^2/|x| \to \infty$. Значит, частота колебаний $\omega = gt/2|x|$ стремится к бесконечности в любой ограниченной области при $t \to \infty$ и убывает с увеличением $|x|$. Далее, фазовая скорость V поверхностных волн растет линейно во времени. Ее можно определить, проследив за движением локального максимума волны. Из (38) следует, что он движется так, что $gt^2/4|x| = c = \text{const}$, т. е. $|x| = gt^2/4c$, и $V = x_t$ является линейной функцией t.

Таким образом, если в большом водоеме (море, океан) изучаются волны, пришедшие издалека, вызванные каким-то локальным возмущением (например, штормом), то эти волны будут иметь большую длину волны (если t не слишком велико, но $\lambda \to \infty$) и большую фазовую скорость. Поэтому, несмотря на их весьма малую амплитуду, с помощью усредняющих приборов их можно зафиксировать на фоне тех более коротких волн, которые постоянно наблюдаются на поверхности этого водоема. Еще в 1949 г. американский ученый Дикон и его сотрудники провели исследование (см. [104]), устанавливающее связь между случаями штормов в Атлантике, местоположение которых известно из метеорологических наблюдений, и длинными волнами, которые движутся из штормовой области и достигают побережья Корнуолла в относительно короткое время. Ясно, что в принципе такие расчеты можно превратить, например, в метод предсказания движения штормов в районах, где нет метеорологических наблюдений.

§ 5. Асимптотика преобразования Фурье функции, сосредоточенной на гладкой замкнутой поверхности

Пусть $x \in R^n$, $\sigma \in R^n$, S — бесконечно дифференцируемая ограниченная замкнутая $n-1$-мерная поверхность в R^n без края (не обязательно связная). Через ω обозначим точку единичной сферы $\omega = x/r$, $r = |x|$. В этом параграфе для некоторого ω_0 будет полу-

чена асимптотика при $r\to\infty$, $|\omega-\omega_0|\ll 1$ интеграла:

$$I(x)=\int\limits_S f(\sigma)\,e^{-i<x,\sigma>}\,dS,\qquad f\in C^\infty(R^n). \tag{40}$$

Соответствующие асимптотические формулы имеют важные приложения не только в теории дифференциальных уравнений (о чем частично будет идти речь в гл. VII), но и в некоторых других разделах математики (например, теории чисел).

Обозначим через $\sigma^j=\sigma^j(\omega)$, $1\leqslant j\leqslant m$, точки на S, в которых нормаль к S параллельна вектору ω; через $\lambda_{js}(\omega)$, $1\leqslant s\leqslant n-1$, — главные кривизны поверхности S в точке $\sigma^j(\omega)$, знак которых определяется после выбора ориентации поверхности S в окрестности точек $\sigma^j(\omega)$. Ориентация задается выбором направления вектора нормали к S, которое мы считаем совпадающим в точках $\sigma^j(\omega)$ с направлением вектора ω. Пусть $k_j(\omega)$ — полная кривизна поверхности S в точке $\sigma^j(\omega)$, т. е. $k_j(\omega)=\prod\limits_{s=1}^{n-1}\lambda_{js}(\omega)$, а γ_j — разность между числом положительных и отрицательных главных кривизн в точке $\sigma^j(\omega)$. Пусть $\mu_j(\omega)=$ $=<\sigma^j(\omega),\omega>$—величина проекции (со знаком) вектора $\sigma^j(\omega)$ на вектор ω (рис. 4).

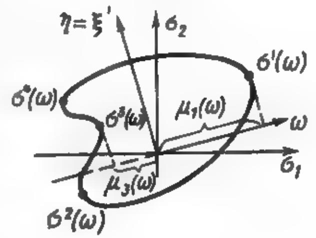

Рис. 4

Будет предполагаться, что на поверхности S имеется конечное число m точек σ^j, в которых нормаль к S параллельна вектору ω_0, причем полная кривизна k_j в этих точках отлична от нуля. Поскольку поверхность S компактна, то отсюда, очевидно, следует, что при $|\omega-\omega_0|\ll 1$ числа m и γ_j не зависят от ω, а точки $\sigma^j(\omega)$ и функции $k_j(\omega)$ бесконечно дифференцируемо зависят от ω.

Теорема 9. *Пусть на поверхности S имеется конечное число m точек σ^j, в которых нормаль к S параллельна вектору ω_0, причем $k_j(\omega_0)\neq 0$. Тогда существует такое $\varepsilon>0$, что при $|\omega-\omega_0|<\varepsilon$*

$$I(x)\sim\sum_{j=1}^{m}\left\{e^{-i\mu_j(\omega)r}\sum_{s=0}^{\infty}a_{js}(\omega)\,r^{\frac{1-n}{2}-s}\right\},\quad r\to\infty, \tag{41}$$

где

$$a_{j0}=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,|k_j(\omega)|^{-1/2}f(\sigma^j(\omega))\,e^{-i\gamma_j\pi/4}. \tag{42}$$

Это разложение можно почленно дифференцировать по x любое число раз.

Заметим, что при фиксированном $\sigma\in S$ подынтегральная функция в (40) описывает стационарную плоскую волну, идущую в на-

правлении вектора σ с частотой $|\sigma|$ и амплитудой $f(\sigma)$. Теорема 9 утверждает, что сумма таких волн по всем $\sigma\in S$ дает несколько сферических волн, идущих с частотами $\mu_j(\omega)$, зависящими от направления ω.

Прежде чем переходить к доказательству теоремы, докажем два вспомогательных утверждения.

Определение. Пусть K — компакт в R^n и $\{U_j\}$ — его конечное покрытие областями U_j. *Разбиением единицы на K, подчиненным покрытию* $\{U_j\}$, называется набор функций $\{\varphi_j\}$ такой, что $\varphi_j\in C_0^\infty(U_j)$ и $\Sigma\varphi_j\equiv 1$ на K.

Лемма 2. *Для любого компакта K и любого его конечного покрытия $\{U_j\}$ существует разбиение единицы $\{\varphi_j\}$ на K, подчиненное этому покрытию.*

Доказательство. Через U_j^ε обозначим ε-сужение области U_j, т. е. совокупность точек области U_j, расстояние от которых до границы области U_j больше ε. Очевидно, существует такое $\varepsilon=\varepsilon_0>0$, что области $\{U_j^{\varepsilon_0}\}$ покрывают K. Пусть $\{\psi_j\}$ — произвольные функции, такие, что $\psi_j\in C_0^\infty(U_j)$, $\psi_j\geqslant 0$ и $\psi_j=1$ на $U_j^{\varepsilon_0}$. Тогда если $\Psi=\Sigma\psi_j$, то $\Psi\geqslant 1$ на K. Рассмотрим ограничение $\Psi|_K$ функции Ψ на компакт K, и пусть Ψ_0 — какое-нибудь его бесконечно дифференцируемое продолжение на все R^n, такое, что $\Psi_0\geqslant 1/2$ в R^n. Тогда в качестве функций $\{\varphi_j\}$ можно взять $\varphi_j=\psi_j\Psi_0^{-1}$. ■

Лемма 3. *Пусть $F\in C^\infty(R_\sigma^n)$, а S — поверхность в R_σ^n, заданная уравнениями $\sigma=\sigma(\eta)$, $\eta\in V\subset R^{n-1}$, где V — область в R^{n-1}, $\sigma\in C^\infty(V)$ и ранг матрицы Якоби $\sigma'_\eta=\partial\sigma/\partial\eta$ равен $n-1$. Тогда $\nabla_\eta F(\sigma(\eta))=0$ тогда и только тогда, когда в соответствующей точке $\sigma=\sigma(\eta)$ вектор $\nabla_\sigma F(\sigma)$ ортогонален S.*

Доказательство. Так как $F'_{\eta_i}(\sigma(\eta))=\langle\nabla_\sigma F,\sigma'_{\eta_i}\rangle$, то равенство $\nabla_\eta F(\sigma(\eta))=0$ означает, что вектор $\nabla_\sigma F$ ортогонален векторам σ'_{η_i}, $1\leqslant i\leqslant n-1$. Отсюда следует утверждение леммы 3, поскольку векторы σ'_{η_i} принадлежат касательной плоскости к S и в силу условия $\operatorname{rank}\sigma'_\eta=n-1$ линейно независимы. ■

Доказательство теоремы 9. Построим специальное покрытие поверхности S областями $U_j\subset R_\sigma^n$, $1\leqslant j\leqslant N$. В качестве U_j, $1\leqslant j\leqslant m$, возьмем настолько малые окрестности точек $\sigma^j(\omega_0)$, чтобы области U_j, $1\leqslant j\leqslant m$, попарно не пересекались и чтобы $S\cap\bar U_j$ бесконечно гладко проектировалось в касательную плоскость к S, проведенную через любую точку $\sigma\in S\cap\bar U_j$.

Теперь выберем $\varepsilon>0$ настолько малым, чтобы при $|\omega-\omega_0|\leqslant\varepsilon$ числа m и γ_j не зависели от ω, точки $\sigma^j(\omega)$ и функции $k_j(\omega)$ бесконечно дифференцируемо зависели от ω, функции $k_j(\omega)$ не обращались в нуль и компакты $\Sigma_j=\{\sigma^j(\omega):|\omega-\omega_0|\leqslant\varepsilon\}$ принадлежали U_j. Остальную часть $S\setminus(\bigcup\limits_{1\leqslant j\leqslant m}U_j)$ поверхности S (она компактна) покроем конечным числом областей U_s, $m+1\leqslant s\leqslant N$, произвольно, лишь бы в каждой из них поверхность S можно было записать

в локальных координатах: $\sigma=\sigma(\eta)$, $\eta=(\eta_1, ..., \eta_{n-1})\in V_s$, где V_s — область в R^{n-1}, вектор-функции $\sigma=\sigma(\eta)\in C^\infty(\bar{V}_s)$ и зависят от s, $\operatorname{rank} \partial\sigma(\eta)/\partial\eta = n-1$ при $\eta\in\bar{V}_s$. Взяв области $U_s \setminus (\bigcup\limits_{1\leqslant j\leqslant m} \Sigma_j)$, $s>m$, вместо U_s можно добиться того, чтобы области $\{U_j\}$, $1\leqslant j\leqslant N$, покрывали всю поверхность S и $U_s\cap\Sigma_j=\varnothing$ при $s>m$.

Локальные координаты на S в областях U_j, $1\leqslant j\leqslant m$, выберем специальным образом. Для этого сделаем в $R_\sigma{}^n$ поворот осей координат $\sigma\to\xi=(\xi_1, ..., \xi_n)$ так, чтобы ось ξ_n была направлена по вектору ω. Так как $S\cap\bar{U}_j$, $j\leqslant m$, бесконечно гладко проектируется в касательную плоскость к S, проведенную через точку $\sigma^j(\omega)$, то в переменных ξ поверхность $S\cap\bar{U}_j$, $j\leqslant m$, может быть записана в виде $\xi_n=\xi_n{}^j(\xi', \omega)$, где $\xi'=(\xi_1, ..., \xi_{n-1})\in V_j\subset R^{n-1}$, т. е. в качестве локальных координат на S в $\bar{U}_j$ при $j\leqslant m$ можно взять $\eta=\xi'$.

Пусть теперь $\{\varphi_j\}$ — разбиение единицы на S, подчиненное покрытию $\{U_j\}$. Тогда

$$I(x)=\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{S}\varphi_j(\sigma)f(\sigma)e^{-i<\omega,\sigma>r}\,dS=$$

$$=\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{V_j}(\varphi_j fD)\,(\sigma(\eta))\,e^{-i<\omega,\sigma(\eta)>r}\,d\eta, \qquad (43)$$

где D — якобиан $dS/d\eta$. Применим к последним интегралам при $r\to\infty$ и $|\omega-\omega_0|\leqslant\varepsilon$ метод стационарной фазы. В силу леммы 3 точки стационарной фазы находятся из условия $\nabla_\sigma<\omega, \sigma>\perp S$, т. е. $\omega\perp S$. Таким образом, при $j\leqslant m$ для каждого интеграла в (43) (обозначим их через I_j) есть одна точка стационарной фазы, для которой $\sigma=\sigma^j(\omega)$, а при $j>m$ точек стационарной фазы нет. Применяем к интегралам I_j при $j\leqslant m$ теорему 7, а при $j>m$ — теорему 6. Остается показать, что асимптотическое разложение интегралов I_j, $j\leqslant m$, дается выражением, стоящим под знаком суммы по j в формуле (41).

После замены переменных $\sigma\to\xi=(\eta, \xi_n)$ точки $\sigma\in S\cap\bar{U}_j$ перейдут в $(\eta, \xi^j(\eta, \omega))$, причем точке $\sigma^j(\omega)$ соответствует $\eta=\eta^j$ и $\xi^j{}_n(\eta^j, \omega)=\mu_j(\omega)$ (см. рис. 4). Вектор x в новых координатах будет иметь вид $(0, ..., 0, r)$. Так как скалярное произведение $<x, \sigma>$ не изменится, если оба вектора повернуть на один и тот же угол, то это скалярное произведение можно вычислить, записав оба вектора в координатах ξ. Таким образом,

$$I_j=\int\limits_{V_j}\varphi_j fD e^{-ir\xi^j{}_n(\eta,\omega)}\,d\eta, \quad j\leqslant m. \qquad (44)$$

Как было показано выше, подынтегральная функция в (44) имеет ровно одну точку стационарной фазы $\eta=\eta^j$ и в ней $\xi_n{}^j=\mu_j(\omega)$. Очевидно, если $(\xi^j{}_n)''=(\partial^2\xi^j{}_n/\partial\eta_k\partial\eta_l)$, $1\leqslant k$, $l\leqslant n-1$, то при $\eta=\eta^j$

$$|\det(\xi^j{}_n)''|=|k_j(\omega)|, \quad \operatorname{sign}[-(\xi^j{}_n)'']=-\gamma_j.$$

Кроме того, поскольку точка $\sigma^j(\omega)$, $|\omega-\omega_0|<\varepsilon$, принадлежит U_j и не содержится в U_s при $s\neq j$, то $\varphi_j(\sigma^j(\omega))=1$. Далее, очевидно, $D=1$ при $\eta=\eta^j$. Таким образом, применив теорему 7 к интегралу I_j, $j<m$, получаем асимптотическое выражение, совпадающее с соответствующим слагаемым, стоящим под знаком суммы по j в формуле (41). ■

Замечания. 1. Назовем открытую на единичной сфере $\Omega=\{x:|x|=1\}$ область $V\subset\Omega$ *неособой*, если она связна и для любого $\omega\in V$ на S существует конечное число точек $\sigma^j(\omega)$, $1\leqslant j\leqslant m$, в которых вектор нормали к S параллелен ω, причем во всех этих точках $k_j(\omega)\neq 0$. Пусть K — произвольный компакт, принадлежащий V. Поскольку теорема 9 дает асимптотику интеграла (40) в некоторой окрестности каждой точки $\omega_0\in V$, то, выбрав из этих окрестностей конечное покрытие компакта K, получаем, что m не зависит от ω и утверждение теоремы 9 справедливо равномерно по ω при $\omega\in K$.

2. Пусть поверхности S_t, $0\leqslant|t|<t_0$, лежат в ограниченной части пространства R^n_σ и задаются уравнениями $s(\sigma)=t$, где $s\in C^\infty(R^n_\sigma)$ и $\nabla s\neq 0$ при $\sigma\in S_t$. Пусть S_0 удовлетворяет условиям теоремы 9 для любого ω_0, принадлежащего некоторой неособой области $V\subset\Omega$, и K — компакт, принадлежащий V. Легко показать, что тогда существует такое $t_0>0$, что и поверхности S_t при $|t|<t_0$ будут удовлетворять этим условиям при $\omega_0\in K$, причем m не будет зависеть от t, а точки $\sigma^j(\omega, t)$, в которых нормаль к S_t параллельна вектору ω, будут бесконечно дифференцируемыми функциями обоих своих аргументов при $|t|<t_0$, $\omega\in K$. При этом поскольку при доказательстве теоремы 9 мы опирались только на теоремы 6, 7, а подынтегральные функции в этих теоремах могли зависеть от любого числа дополнительных параметров, то асимптотика интеграла (40) при $S=S_t$, вычисленная с помощью теоремы 9, будет справедлива равномерно по $\omega\in K$ и $t\in[-t_0, t_0]$ и ее можно дифференцировать любое число раз и по x, и по t.

Литературные указания и дополнения. Подробнее с методом стационарной фазы и его приложениями можно познакомиться, например, по монографии М. В. Федорюка [110].

Глава II

МЕТОД ВКБ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Асимптотика решений однородного уравнения

В этом параграфе будет получена асимптотика при $k\to\infty$ решений уравнения

$$y''+k^2q(x)y=0,\ x\in[a,\ b],\ q(x)\in C^\infty([a,\ b]). \tag{1}$$

Это уравнение является модельным примером для многих более сложных уравнений и систем. Кроме того, целый ряд важных физических задач приводит к необходимости изучать именно это уравнение. Например, поперечные колебания струны описываются уравнением $u''_{tt}=a^2(x)u''_{xx}+F(x,\ t)$, где $u(x,\ t)$ — величина отклонения точки x струны от положения равновесия в момент времени t, $a(x)>0$ — скорость распространения колебаний ($a^2=T/\rho$, где T — натяжение струны, ρ — линейная плотность), $F(x,\ t)$ пропорционально линейной плотности внешних сил. Это же уравнение описывает и другие одномерные упругие колебания: продольные колебания упругого стержня, колебания газа в трубке электрические колебания и др. Если внешние силы периодичны по времени, т. е. $F(x,\ t)=f(x)\exp(ikt)$, и решение выходит на периодический режим $u(x,\ t)=y(x)\exp(ikt)$, то, подставив F и u в уравнение колебаний, получим, что амплитуда $y(x)$ установившихся колебаний, вызванных периодической силой, удовлетворяет уравнению $a^2(x)y''+k^2y=-f(x)$. Это уравнение отличается от уравнения (1) только наличием неоднородности в правой части. Но хорошо известно, что, решив однородное уравнение (1), можно методом вариации произвольных постоянных решить также и неоднородное. Таким образом, задача свелась к изучению уравнения (1), в котором $q(x)=a^{-2}(x)$ и k — частота колебаний. Поэтому асимптотика решений уравнения (1) при $k\to\infty$ называется *коротковолновой* или *высокочастотной*.

Уравнение (1) возникает также в квантовой механике. Движение квантовой частицы в потенциальном поле $U(x)$ описывается волновой функцией $\psi(t,\ x)$, удовлетворяющей уравнению Шредингера $i\hbar\partial\psi/\partial t=H\psi$, где H — оператор энергии, имеет вид

$$H\psi=\frac{-\hbar^2}{2m}\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+U(x)\psi.$$

Здесь m — масса частицы, $\hbar$ — постоянная Планка, а величина $|\psi|^2$ равна плотности вероятности нахождения частицы в момент времени t в точке x. Стационарные состояния определяются либо как решения уравнения Шредингера вида $\psi=y(x)\exp(-i\hbar^{-1}Et)$, где $E=\mathrm{const}$ (при этом $|\psi|^2$ от t не зависит), либо как собственные функции оператора H: $Hy=Ey$. И то и другое определение приводит к одному и тому же уравнению для функции y:

$$\frac{\hbar^2}{2m}y'' + [E-U(x)]\,y=0. \tag{2}$$

В этом уравнении есть естественный малый параметр $\hbar$. Величина $\lambda\!\!\!^{-}=2\pi\hbar/\sqrt{2m(E-U(x))}$ называется длиной волны де Бройля. Если она меняется медленно, т. е. $\lambda\!\!\!^{-}{}'_x\ll 1$, то асимптотическое разложение решений уравнения (2) по параметру $\lambda\!\!\!^{-}{}'_x$ называется *квазиклассическим*. Уравнение (2) можно переписать в виде (1) с $k=\sqrt{2m}/\hbar$ и $q(x)=E-U(x)$. Если $E-U(x)\neq 0$, то предельный переход при $\lambda\!\!\!^{-}{}'_x\to 0$ эквивалентен предельному переходу при $\hbar\to 0$ или $k\to\infty$. Поэтому асимптотическое разложение решений уравнения (1) при $k\to\infty$ называется также *квазиклассическим*. Свое происхождение этот термин ведет от того факта, что законы классической механики можно получить предельным переходом из соответствующих квантовомеханических законов при $\hbar\to 0$.

Асимптотическое разложение при $k\to\infty$ решений уравнения (1) называют также *ВКБ-асимптотикой*. Это название не менее распространено, чем коротковолновая асимптотика или квазиклассическая асимптотика. Оно представляет собой первые буквы фамилий авторов, впервые применивших этот метод в задачах квантовой механики: Вентцель, Крамерс, Бриллюэн.

Формальная схема метода ВКБ. Будем искать решение уравнения (1) в виде асимптотического ряда:

$$y\sim e^{ikS(x)}\sum_{j=0}^{\infty}a_j(x)\,(ik)^{-j},\quad a_0(x)\not\equiv 0. \tag{3}$$

Дифференцируя почленно, получаем

$$\begin{aligned}y''\sim\Big\{(ik)^2S'^2\sum_{j=0}^{\infty}a_j(ik)^{-j}+2ikS'\sum_{j=0}^{\infty}a_j'(ik)^{-j}+\\ +ikS''\sum_{j=0}^{\infty}a_j(ik)^{-j}+\sum_{j=0}^{\infty}a_j''(ik)^{-j}\Big\}e^{ikS}=\\ =(ik)^2S'^2e^{ikS}\sum_{j=0}^{\infty}a_j(ik)^{-j}+e^{ikS}\Big\{(2S'a_0'+S''a_0)(ik)+\\ +\sum_{j=0}^{\infty}(2S'a_{j+1}'+S''a_{j+1}+a_j'')(ik)^{-j}\Big\}.\end{aligned} \tag{4}$$

Подставим разложения (3), (4) в уравнение (1) и сократим на $\exp(ikS)$. Получим

$$(ik)^2 (S'^2 - q) \sum_{j=0}^{\infty} a_j (ik)^{-j} + (2S' a_0' + S'' a_0)(ik) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} (2S' a_{j+1}' + S'' a_{j+1} + a_j'')(ik)^{-j} \sim 0. \qquad (5)$$

Соотношение (5) может быть справедливо только в том случае, если сумма коэффициентов при каждой фиксированной степени (ik) в (5) равна нулю. Коэффициентом при старшей степени $(ik)^2$ является $[S'^2(x)-q(x)]a_0(x)$. Так как $a_0(x)\not\equiv 0$, то положим

$$S'^2(x) - q(x) \equiv 0. \qquad (6)$$

После этого в левой части соотношения (5) можно отбросить первую треть слагаемых (в которых есть сомножитель S'^2-q). Приравнивая затем нулю последовательно коэффициенты при $(ik)^l$, $l=1, 0, -1, -2, \ldots$, в левой части соотношения (5), получаем уравнения

$$2S'a'_0+S''a_0=0; \qquad (7)$$

$$2S'a'_{j+1}+S''a_{j+1} = -a''_j, \ j\geqslant 0. \qquad (8)$$

Уравнение (6) в оптических задачах называется *уравнением эйконала*, а в квантовомеханических — *уравнением Гамильтона — Якоби*. Уравнения (7), (8) называются *уравнениями переноса*. Точнее эти названия носят аналоги указанных уравнений, возникающие при асимптотическом исследовании решений многомерного аналога уравнения (1): $[\Delta+k^2q(x)]u=0$, $x\in R^n$, Δ — оператор Лапласа.

В дальнейшем на $q(x)$ накладываются следующие условия:

А) $q(x)\neq 0$ при $x\in[a, b]$.

Если $q(x)>0$ при $x\in[a, b]$, то через $\sqrt{q(x)}$ обозначим арифметическое значение корня. Если $q(x)<0$ при $x\in[a, b]$, то через $\sqrt{q(x)}$ обозначим то значение корня, для которого $\operatorname{Im}\sqrt{q(x)}>0$. Если $\operatorname{Im} q(x)\not\equiv 0$, на функцию $q(x)$ накладывается второе условие.

В) При $x\in[a, b]$ можно выбрать непрерывную ветвь $\sqrt{q(x)}$ так, что $\operatorname{Im}\sqrt{q(x)}\geqslant 0$.

В дальнейшем эта ветвь раз и навсегда фиксируется. После этого такие функции, как $q^{-1/4}(x)$, однозначно определены.

Решив уравнение (6), получим, что

$$S(x) = \pm \int_{x_0}^{x} \sqrt{q(t)}\, dt, \quad x_0\in[a, b]. \qquad (9)$$

Затем подставляем $S(x)$ в уравнение (7):

$$2\sqrt{q}\,a_0' + \frac{q'}{2\sqrt{q}}a_0 = 0.$$

Отсюда $da_0/a_0 = -dq/4q$ и, значит, $a_0 = Cq^{-1/4}$. После этого последовательно из уравнения (8) находим все коэффициенты a_j, $j>0$. Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Формальный асимптотический ряд* (3) *удовлетворяет уравнению* (1) *тогда и только тогда, когда функция* $S(x)$ *имеет вид* (9), *а функции* $a_j(x)$ *являются решениями уравнений переноса* (7), (8). *В частности,* $a_0 = Cq^{-1/4}$ *и, значит, ряд* (3) *имеет вид*

$$Cq^{-1/4}(x)\,e^{\pm ik\int\limits_{x_0}^{x}\sqrt{q(t)}\,dt}(1+O(k^{-1})).$$

Заметим, что формулы (3), (9) дают два существенно разных ряда, удовлетворяющих уравнению (1). Они отличаются знаком функции S. Тот факт, что функция S определяется с точностью до аддитивной постоянной, зависящей от выбора x_0, несуществен, поскольку изменение $S(x)$ на константу γ эквивалентно умножению ряда (3) на константу $\exp(ik\gamma)$, что не влияет на вопрос о том, будет ли ряд (3) удовлетворять уравнению (1). Аналогично переход от константы C в формуле для a_0 к C_1 эквивалентен умножению ряда на константу C_1/C. Наконец, произвол в выборе начальных условий для решений уравнений (8) связан с тем, что ряд (3) можно умножить на числовой формальный асимптотический ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\alpha_j(ik)^{-j}$.

Теорема 1 дает нам решение уравнения (1) в классе формальных асимптотических рядов. Существование классического решения с указанной асимптотикой дает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть функции* $a_j(x)$, $j=0, 1, \ldots$, *удовлетворяют уравнениям переноса* (7), (8). *Тогда для некоторого* $k_0>0$ *существуют бесконечно дифференцируемые функции* $y_\pm = y_\pm(x, k) \in C^\infty([a, b]\times[k_0, \infty))$, *удовлетворяющие уравнению* (1), *и такие, что при* $k\to\infty$

$$y_\pm \sim e^{\pm ik\int\limits_{x_0}^{x}\sqrt{q(t)}\,dt}\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x)\,(ik)^{-j},\quad x\in[a, b], \tag{10}$$

причем эти асимптотические разложения можно любое число раз дифференцировать по x *и* k. *В частности, главный член этих асимптотических разложений таков:*

$$y_\pm = Cq^{-1/4}(x)\,e^{\pm ik\int\limits_{x_0}^{x}\sqrt{q(t)}\,dt}(1+O(k^{-1})).$$

Замечание. При вещественной функции $q(x)$ решения $y_\pm$ быстро осциллируют, если $q(x)>0$. В случае $q(x)<0$ формулу (10) можно переписать в виде

$$y_\pm \sim e^{\mp k \int\limits_{x_0}^{x} \sqrt{|q(t)|}\, dt} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x)\,(ik)^{-j}.$$

Доказательство. Построим какую-нибудь функцию $h \in C^\infty([a, b]\times[1, \infty))$, такую, что

$$h(x, k) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x)\,(ik)^{-j},\quad k\to\infty, \tag{11}$$

и это разложение можно дифференцировать по x и k любое число раз. В качестве такой функции можно взять, например,

$$h(x, k) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi(k/t_j)\, a_j(x)\,(ik)^{-j}, \tag{12}$$

где $\varphi(t)$ — произвольная фиксированная бесконечно дифференцируемая функция, равная единице при $t>1$ и нулю при $t<1/2$, а t_j — некоторая числовая последовательность, достаточно быстро стремящаяся к бесконечности при $j\to\infty$. Так как при каждом k только конечное число членов ряда (12) отлично от нуля, то ряд (12) сходится. Константы t_j выберем так, чтобы при всех $\alpha+\beta<j$ и $k\geqslant 1$ была справедлива оценка:

$$\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha\,\partial k^\beta}\left[\varphi(k/t_j)\, a_j(x)\, k^{-j}\right]\right| \leqslant k^{-j+1-\beta}.$$

Очевидно, такие t_j существуют. Тогда при $k\to\infty$, любых α и β и $N\geqslant\alpha+\beta$

$$\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha\,\partial k^\beta} \sum_{j=N+2}^{\infty} \varphi(k/t_j)\, a_j(x)\,(ik)^{-j}\right| \leqslant \sum_{j=N+2}^{\infty} k^{-j+1-\beta} = O(k^{-N-1-\beta}).$$

Значит,

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha\,\partial k^\beta} h(x, k) = \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha\,\partial k^\beta} \sum_{j=0}^{N+1} \varphi(k/t_j)\, a_j(x)\,(ik)^{-j} +$$

$$+\, O(k^{-N-1-\beta}) = \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha\,\partial k^\beta} \sum_{j=0}^{N} a_j(x)\,(ik)^{-j} + O(k^{-N-1-\beta}).$$

Это доказывает справедливость разложения (11).

Обозначим через $\hat{y}_\pm$ функцию

$$\hat{y}_\pm = e^{\pm ik\int\limits_{x_0}^{x}\sqrt{q(t)}\,dt} h(x, k). \tag{13}$$

Из теоремы 1 и формулы (11) следует, что

$$\gamma_\pm \equiv \hat{y}_\pm'' + k^2 q(x)\,\hat{y}_\pm = e^{\pm ik\int\limits_{x_0}^{x}\sqrt{q(t)}\,dt} O(k^{-\infty}),\ k\to\infty. \tag{14}$$

Будем теперь искать точное решение уравнения (1) в виде

$$y(x, k) = y_\pm(x, k) = \hat{y}_\pm(x, k)\,u_\pm(x, k),$$

$$u_\pm(\alpha, k) = 1,\ \frac{d}{dx}u_\pm(\alpha, k) = 0. \tag{15}$$

Точку $\alpha\in[a, b]$ мы выберем позже. В тех случаях, когда это не вызовет путаницы, индексы $\pm$ у функций y, $\hat{y}$, γ, u мы будем опускать. Подставив функцию (15) в уравнение (1), получим для u задачу:

$$\hat{y}u'' + 2\hat{y}'u' + \gamma u = 0,\ u|_{x=\alpha} = 1,\ \ u'|_{x=\alpha} = 0, \tag{16}$$

которую можно переписать в следующем виде:

$$u'' + 2(\hat{y}'/\hat{y})\,u' = f,\ \ u|_{x=\alpha} = 1,\ \ u'|_{x=\alpha} = 0;\ \ f = -\gamma u/\hat{y}.$$

Считая функцию f известной, решим последнюю задачу:

$$u(x, k) = 1 + \int\limits_{\alpha}^{x}\hat{y}^{-2}(\eta, k)\int\limits_{\alpha}^{\eta}\hat{y}^2(\xi, k)\,f(\xi)\,d\xi\,d\eta.$$

Переставим еще пределы интегрирования. Получим эквивалентное задаче (16) интегральное уравнение:

$$u(x, k) + \int\limits_{\alpha}^{x}P(x, \xi, k)\,u(\xi, k)\,d\xi = 1, \tag{17}$$

$$P(x, \xi, k) = P_\pm(x, \xi, k) = \hat{y}_\pm(\xi, k)\,\gamma_\pm(\xi, k)\int\limits_{\xi}^{x}\hat{y}_\pm^{-2}(\eta, k)\,d\eta =$$

$$= h(\xi, k)\,O(k^{-\infty})\int\limits_{\xi}^{x}h^{-2}(\eta, k)\,e^{\pm 2ik\int\limits_{\eta}^{\xi}\sqrt{q(t)}\,dt}\,d\eta. \tag{18}$$

Последнее равенство получено после использования формул (13), (14).

В формуле (17) положим теперь $\alpha=b$, если $u=u_+$, $P=P_+$ и $\alpha=a$, если $u=u_-$, $P=P_-$. В первом случае $\xi>x$, и поскольку в фор-

муле (18) $\eta\in[\xi, x]$, то $\eta<\xi$. Во втором случае $\eta>\xi$. А так как $\operatorname{Im}\sqrt{q(t)}\geqslant 0$, то в обоих случаях модуль экспоненты, стоящей под знаком интеграла в (18), не превосходит единицы. Далее, так как $a_0(x)=Cq^{-1/4}(x)\neq 0$ при $x\in[a, b]$, то из формулы (11) следует существование таких k', $C_1>0$ и $C_2>0$, что $C_1>|h(x, k)|>C_2$ при $k>k'$ и $x\in[a, b]$. Значит, $P(x, \xi, k)=O(k^{-\infty})$ при $k\to\infty$, причем это соотношение равномерно по $x, \xi\in[a, b]$. Но тогда уравнение (17) при достаточно больших k однозначно разрешимо, причем $u(x, k)=1+O(k^{-\infty})$, $k\to\infty$. Последнее равенство можно дифференцировать по x и k любое число раз, что доказывается дифференцированием уравнения (17). Вместе с равенством (15) это доказывает теорему 2. ■

§ 2. Задача рассеяния

В этом параграфе будет рассматриваться уравнение

$$y''-k^2q(x)y=0, \quad x\in R^1, \tag{19}$$

где $q\in C^\infty(R^1)$, $q(x)>0$ при всех $x\in R^1$ и существует такое $L<\infty$, что $q(x)=1$ при $|x|>L$. При $x<-L$ уравнение (19) имеет следующие два решения: $y=\exp(\pm ikx)$. Эти решения продолжаются на всю прямую. Обозначим их через $y^1_\pm$. Аналогично определенные на всей прямой решения уравнения (19), равные $\exp(\pm ikx)$ при $x>L$, обозначим через $y^2_\pm$. Так как функции $y^1_\pm$ образуют фундаментальную систему решений, то функции $y^2_\pm$ являются их линейными комбинациями. Значит,

$$y^2_+=a(k)y^1_++b(k)y^1_-. \tag{20}$$

Применив операцию комплексного сопряжения к последнему равенству, получим, что

$$y^2_-=\overline{b(k)}\,y^1_++\overline{a(k)}\,y^1_-.$$

Матрица $S=\begin{pmatrix}1/a, & b/a\\ -\bar{b}/a, & 1/a\end{pmatrix}$ называется *матрицей рассеяния*, а коэффициенты $|1/a(k)|^2$ и $|b(k)/a(k)|^2$ — *коэффициентами прохождения и отражения* соответственно. Их смысл заключается в следующем. Рассмотрим решение $y=a^{-1}(k)y^2_+$. В силу формулы (20) это решение при $|x|>L$ равно

$$y(x)=\begin{cases} e^{ikx}+\dfrac{b(k)}{a(k)}e^{-ikx}, & x<-L,\\[2mm] \dfrac{1}{a(k)}e^{ikx}, & x>L.\end{cases} \tag{21}$$

Из формулы (21) следует, что функция $y(x)$ описывает рассеяние на неоднородностях среды (в области $|x|<L$) плоской волны $\exp(ikx)$, идущей из $x=-\infty$. При этом часть рассеянной волны с множителем $b(k)/a(k)$ идет в обратном направлении, а часть — с множителем $1/a(k)$ — проходит область, в которой среда неоднородна, и уходит в $x=+\infty$. Вторая строчка матрицы рассеяния состоит из множителей при отраженной и прошедшей через неоднородность волнах, соответствующих падающей волне $\exp(-ikx)$, движущейся из $x=+\infty$.

Цель этого параграфа — найти асимптотику коэффициентов $a(k)$ и $b(k)$ при $k\to\infty$.

Теорема 3. *При $k\to\infty$ справедливы соотношения:*

$$a(k)=e^{-ik\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\sqrt{q(x)}-1]\,dx}+O(k^{-1}),\quad b(k)=O(k^{-\infty}).$$

Доказательство. Обозначим через $y_\pm$ построенные в теореме 2 решения уравнения (19), для которых при $|x|<2L$

$$y_\pm\sim e^{\pm ik\int\limits_{-L}^{x}\sqrt{q(t)}\,dt}\sum_{j=0}^{\infty}a_j(x)(ik)^{-j},\quad k\to\infty,\tag{22}$$

где $a_j(x)$ — решения уравнений переноса (7), (8) с начальными условиями $a_0(-L)=1$, $a_j(-L)=0$ при $j>0$. Решения $y_\pm$, как и любые другие решения уравнения (19), определены при всех x. Поскольку функция $S(x)$ при $|x|\geqslant L$ является линейной, то решения уравнений переноса не зависят от x при $|x|\geqslant L$, и из (22) следует, что при $k\to\infty$

$$y_\pm\sim e^{\pm ik(x+L)}(1+O(k^{-\infty})),\quad -2L\leqslant x\leqslant -L,\tag{23}$$

$$y_\pm\sim e^{\pm ik(\psi+x-L)}\sum_{j=0}^{\infty}c_j^\pm(ik)^{-j},\quad L\leqslant x\leqslant 2L,\tag{24}$$

где $\psi=\int\limits_{-L}^{L}\sqrt{q(t)}\,dt$, $c_j^\pm=a_j(L)$ — значения решений уравнений переноса в точке $x=L$ с указанными выше начальными данными (величина $c^\pm{}_j$ зависит от выбора функции S).

Функции $y_\pm$ так же, как и $y^1{}_\pm$, образуют фундаментальную систему решений уравнения (19). Поэтому можно представить $y^2{}_+$ в виде

$$y_+^2=\alpha(k)\,y_++\beta(k)\,y_-,\tag{25}$$

а функции $y_\pm$ представить в виде линейных комбинаций функций $y^1{}_\pm$:

$$y_+=\gamma_1(k)\,y_+^1+\gamma_2(k)\,y_-^1,\quad y_-=\delta_1(k)\,y_+^1+\delta_2(k)\,y_-^1.$$

Если определить коэффициенты α, β, γ_j, δ_j, $j=1, 2$, получим разложение функции y^2_+ по $y^1_\pm$. Поскольку на отрезке $[L, 2L]$ известно асимптотическое разложение при $k\to\infty$ функций y^2_+ и $y_\pm$, то можно найти асимптотическое поведение при $k\to\infty$ коэффициентов α, β. Асимптотику коэффициентов γ_j, δ_j можно найти, исходя из известных асимптотических разложений функций $y_\pm$ и $y^1_\pm$ при $x\in[-2L, -L]$.

Найдем асимптотику коэффициентов $\alpha(k)$, $\beta(k)$ при $k\to\infty$. Так как $y^2_+=\exp(ikx)$ при $x\geqslant L$, а для $y_\pm$ имеют место соотношения (24), то равенство (25) при $x=L$ принимает вид

$$e^{ikL}\sim\alpha(k)\,e^{ik\psi}\sum_{j=0}^{\infty}c_j^+\,(ik)^{-j}+\beta(k)\,e^{-ik\psi}\sum_{j=0}^{\infty}c_j^-\,(ik)^{-j}.$$

Если равенство (25) предварительно продифференцировать по x, а затем положить $x=L$, получится соотношение

$$e^{ikL}\sim\alpha(k)\,e^{ik\psi}\sum_{j=0}^{\infty}c_j^+\,(ik)^{-j}-\beta(k)e^{-ik\psi}\sum_{j=0}^{\infty}c_j^-\,(ik)^{-j}.$$

Из последних двух соотношений следует, что при $k\to\infty$

$$\alpha(k)\sim e^{ik(L-\psi)}\Big[\sum_{j=0}^{\infty}c_j^+\,(ik)^{-j}\Big]^{-1},\ \beta(k)=O(k^{-\infty}). \tag{26}$$

Аналогично, используя соотношение (23) вместо (24), получаем, что

$$y_+=O(k^{-\infty})\,y^1_-+[e^{ikL}+O(k^{-\infty})]\,y^1_+,$$

$$y_-=[e^{-ikL}+O(k^{-\infty})]\,y^1_-+O(k^{-\infty})\,y^1_+.$$

Вместе с (25), (26) это приводит к равенствам:

$$a(k)\sim e^{ik(2L-\psi)}\Big[\sum_{j=0}^{\infty}c_j^+\,(ik)^{-j}\Big]^{-1},\ b(k)=O(k^{-\infty}).$$

Остается заметить, что $c^+_0=a_0(L)$. Так как $a_0(x)$ — решение уравнения (7) с начальным условием $a_0(-L)=1$ и $q(x)=1$ при $|x|>L$, то $a_0(x)=q^{-1/4}(x)$ и, значит, $a_0(L)=1$, т. е. $c^+_0=1$. ■

§ 3. Асимптотика решений краевых задач

В этом параграфе будет изучаться задача:

$$y''-\lambda q(x)y=0,\quad 0<x<1;\quad y(0)=A,\quad y(1)=B, \tag{27}$$

где q — вещественная функция, $q\in C^\infty(R^1)$, $q(x)\neq0$. Без ограничения общности можно считать, что $q(x)>0$, поскольку в противном случае можно заменить одновременно знаки у $q(x)$ и λ. Точка λ называется *собственным значением задачи* (27), если одно-

родная задача (27) ($A=B=0$) имеет нетривиальное решение, т. е. λ является собственным значением (несамосопряженного) оператора, задаваемого дифференциальным выражением $q^{-1}(x)d^2/dx^2$. Через $L_{2,q}$ обозначим пространство $L_2([0,1])$ с весом $q(x)$, т. е. $\|u\|_{L_{2,q}}=\|\sqrt{q}\,u\|_{L_2}$.

Лемма 1. *Задача* (27) *имеет счетное множество собственных значений $\lambda=\lambda_n$, $n=1, 2, \ldots$, причем $\lambda_n<0$ при всех n, $\lambda_n\to-\infty$ при $n\to\infty$, а соответствующие собственные функции $y=y_n(x)$ образуют полную ортогональную систему в пространстве $L_{2,q}$.*

Доказательство. После замены $\sqrt{q}y=z$ однородная задача (27) переходит в задачу на собственные значения для самосопряженного оператора Штурма — Лиувилля:

$$\left(\frac{z'}{q(x)}\right)'+\left(\frac{3}{4}\frac{(q')^2}{q^3}-\frac{1}{2}\frac{q''}{q^2}\right)z=\lambda z,\quad z(0)=z(1)=0.$$

Отсюда вытекает справедливость всех утверждений леммы, кроме утверждения о знаке λ_n. Последнее получается стандартным образом после умножения уравнения (27) для собственной функции $y=y_n(x)$ на $\bar{y}_n(x)$ и интегрирования по отрезку $[0, 1]$. Взяв действительную часть от всех слагаемых и проинтегрировав в первом слагаемом по частям, получаем, что

$$\int_0^1[-|y_n'|^2-\lambda_n q(x)|y_n|^2]\,dx=0.$$

Значит, либо $\lambda_n<0$, либо $\lambda_n=0$. Последний случай невозможен, так как тогда $y'_n\equiv0$ и, значит, $y_n\equiv0$, поскольку $y_n(0)=y_n(1)=0$. ■

Напомним, что через $O(k^{-1})$, $k\to\infty$, обозначаются различные функции переменной k, имеющие указанный порядок при $k\to\infty$. Они могут, кроме того, зависеть еще и от x (и тогда предполагается, что указанное убывание при $k\to\infty$ равномерно по x). Чтобы подчеркнуть эту зависимость, мы будем иногда пользоваться обозначением $O_x(k^{-1})$, $k\to\infty$.

Поведение решений задачи (27) при $\lambda\to-\infty$ дается следующей теоремой. Занумеруем собственные значения задачи (27) в порядке возрастания $|\lambda|$, и пусть $k=\sqrt{|\lambda|}$.

Теорема 4. *Существует такое целое n_0, что при $n\to\infty$*

$$k_n=\sqrt{|\lambda_n|}=(n-n_0)\pi\left[\int_0^1\sqrt{q(x)}\,dx\right]^{-1}+O(n^{-1}),\tag{28}$$

соответствующие собственные функции $y_n(x)$ равны

$$y_n(x)=c_n\left[q^{-1/4}(x)\sin\left(k_n\int_0^x\sqrt{q(t)}\,dt\right)+O_x(n^{-1})\right],\quad c_n=\mathrm{const}.\tag{29}$$

При $\lambda \neq \lambda_n$ задача (27) *однозначно разрешима, и при* $\lambda \to -\infty$, $\lambda \neq \lambda_n$ *решение имеет вид*

$$y(x) = 2iw^{-1}(k)\, q^{-1/4}(x) \left\{ A \left[q^{1/4}(0) \sin\left(k \int_1^x \sqrt{q(t)}\, dt\right) + O_x(k^{-1}) \right] - \right.$$

$$\left. - B \left[q^{1/4}(1) \sin\left(k \int_0^x \sqrt{q(t)}\, dt\right) + O_x(k^{-1}) \right] \right\}, \tag{30}$$

где $k = \sqrt{|\lambda|}$, w — *некоторая бесконечно дифференцируемая функция* k, *обращающаяся в нуль только при* $k = k_n$, *равная*

$$-2i \sin\left(k \int_0^1 \sqrt{q(x)}\, dx\right) + O(k^{-1}) \text{ при } k \to \infty.$$

З а м е ч а н и е. Если формулу (29) заменить на следующую эквивалентную ей формулу

$$y_n(x) = c_n q^{-1/4}(x) \left[e^{ik_n \int_0^x \sqrt{q(t)}\, dt} (1 + O_x(n^{-1})) - \right.$$

$$\left. - e^{-ik_n \int_0^x \sqrt{q(t)}\, dt} (1 + O_x(n^{-1})) \right], \tag{31}$$

то она будет допускать дифференцирование любое число раз по x. Соответствующий аналог формулы (30) можно дифференцировать любое число раз по x и k.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При достаточно больших k общее решение уравнения (27) можно записать в виде

$$y(x, k) = C_1 y_+(x, k) + C_2 y_-(x, k), \tag{32}$$

где функции $y_\pm(x, k)$ определены в теореме 2. Из этой теоремы следует, что при $k \to \infty$

$$y(x, k) = C_1 q^{-1/4}(x)\, e^{ik \int_0^x \sqrt{q(t)}\, dt} (1 + O_x(k^{-1})) +$$

$$+ C_2 q^{-1/4}(x)\, e^{-ik \int_0^x \sqrt{q(t)}\, dt} (1 + O_x(k^{-1})). \tag{33}$$

Подставляя функцию (32) в граничные условия задачи (27), получаем для неизвестных C_1, C_2 систему

$$\begin{cases} C_1 y_+(0, k) + C_2 y_-(0, k) = A, \\ C_1 y_+(1, k) + C_2 y_-(1, k) = B, \end{cases} \tag{34}$$

которая, в силу той же теоремы, при $k\to\infty$ приобретает вид

$$\begin{cases} C_1(1+O(k^{-1}))+C_2(1+O(k^{-1}))=Aq^{1/4}(0), \\ C_1 e^{ik\int\limits_0^1 \sqrt{q(t)}\,dt}(1+O(k^{-1}))+ \\ \quad + C_2 e^{-ik\int\limits_0^1 \sqrt{q(t)}\,dt}(1+O(k^{-1}))=Bq^{1/4}(1). \end{cases} \tag{35}$$

Определитель системы (34) обозначим через $w(k)$. Так как $y_\pm(x, k)\in C^\infty([0, 1]\times[k_0, \infty))$, то $w\in C^\infty([k_0, \infty))$. А из (35) следует, что

$$w(k)=-2i\sin\left(k\int\limits_0^1 \sqrt{q(t)}\,dt\right)+O(k^{-1}),\ k\to\infty. \tag{36}$$

При тех k, для которых $w(k)=0$, однородная система (34) имеет нетривиальное решение (C_1, C_2), и соответствующая функция $y(x, k)$ будет собственной функцией задачи (27). При остальных k система (34) и, значит, задача (27) однозначно разрешимы. Таким образом, собственные значения λ_n задачи (27) с $|\lambda_n|\gg 1$ можно найти, приравняв нулю правую часть равенства (36). Оставляем читателю доказать, что решения полученного уравнения имеют вид (28). Если $w(k_n)=0$, то решения однородной системы (35) имеют вид $C_2=-C_1(1+O(k_n^{-1}))$. Подставив эти значения в формулу (33), получим выражение (29) (или (31)) для собственных функций. Решив систему (35) при $k\neq k_n$ и подставив решение в (33), получим формулу (30). ∎

Прежде чем переходить к случаю, когда $\lambda\to+\infty$, дадим еще одну физическую интерпретацию решений задачи (27). Если считать координату x временем, а y — положением материальной точки на оси y, то уравнение (27) принимает форму второго закона Ньютона и описывает движение материальной точки единичной массы по оси y в поле сил, равных $F=\lambda q(x)y$. Если $\lambda<0$, то эта сила направлена в сторону, противоположную отклонению точки от начала координат. Поэтому при $\lambda<0$ решения задачи (27) — осциллирующие, и они осциллируют тем сильнее, чем больше $|\lambda|$. При $\lambda>0$ сила F направлена в ту же сторону, куда отклонилась движущаяся точка. Поэтому ясно, что если $\lambda\gg 1$, то при любых A и B движение из положения $y=A$ в $y=B$ за фиксированное время от $x=0$ до $x=1$ можно осуществить только следующим образом: сначала резким толчком материальная точка должна быть переведена из положения $y=A$ в достаточно малую окрестность начала координат $y=0$, где сила F мала. Там она должна двигаться почти все время. Затем в момент времени, близкий к $x=1$, она должна выйти из этой окрестности и, быстро разгоняясь под действием большой силы $F=\lambda q(x)y$, пройти в момент $x=1$ через положение $y=B$. График такого движения изображен на рис. 1. При этом

движения от положения $y=A$ в некоторую окрестность точки $y=0$ и из нее в точку $y=B$ должны быть тем резче, чем больше λ.

Описанное выше решение задачи (27) при $\lambda \gg 1$ можно было бы получить с помощью метода сращивания асимптотических разложений (см., например, [91]). Запишем уравнение (27) в виде $\varepsilon^2 y''-q(x)y=0$, $\varepsilon^2=\lambda^{-1}\to 0$. Решением предельного уравнения ($\varepsilon=0$) является функция $y\equiv 0$, не удовлетворяющая граничным условиям. Поэтому главным членом асимптотического разложения решения задачи (27), согласно методу сращивания, будет функция $y\equiv 0$, к которой надо добавить погранслойные слагаемые. Эти слагаемые удовлетворяют граничным условиям и экспоненциально убывают при отходе от концов отрезка [0, 1]. Таким образом, метод сращивания приводит к решению, изображенному на рис. 1. Мы ограничимся здесь этим минимальным описанием возможностей метода сращивания, поскольку гораздо проще получить асимптотику при $\lambda\to\infty$ решения задачи (27) (в том числе и строгое обоснование рисунка 1) с помощью теоремы 2.

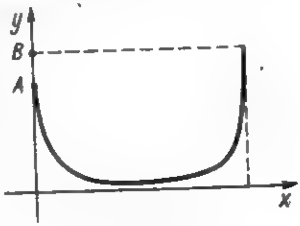

Рис. 1

Теорема 5. *При $\lambda\to+\infty$ решение задачи* (27) *имеет вид*

$$y(x)=A\left[\frac{q(x)}{q(0)}\right]^{-1/4} e^{-k\int_0^x \sqrt{q(t)}\,dt}(1+O_x(k^{-1}))+$$

$$+B\left[\frac{q(x)}{q(1)}\right]^{-1/4} e^{k\int_1^x \sqrt{q(t)}\,dt}(1+O_x(k^{-1})).$$

Это асимптотическое разложение допускает дифференцирование любое число раз по x и k.

Доказательство. Надо записать общее решение уравнения (27) в виде $y=C_1y_++C_2y_-$, где функции $y_\pm$ определены в теореме 2, и определить константы C_1, C_2 из системы, которая получится, если потребовать, чтобы функция y удовлетворяла граничным условиям задачи (27). Подставив после этого вместо $y_\pm$ их асимптотические разложения (10), получим утверждение теоремы 5. ■ Заметим, что в теоремах 3—5 можно выписать соответствующие асимптотические разложения с точностью до $O(k^{-\infty})$.

Литературные указания и дополнения. Мы совсем не останавливались на поведении решений уравнения (1) при $k\to\infty$ в окрестности точек поворота (точек $x\in R^1$, в которых функция $q(x)$ обращается в нуль), а также на изучении асимптотики решений при комплексных k, $|k|\to\infty$. Подробнее с методом ВКБ для обыкновенных дифференциальных уравнений и, в частности, с указанными вопросами можно познакомиться по работам [52, 54].

Глава III

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

В этой главе решается задача Коши для общих уравнений в частных производных первого порядка (в том числе для уравнений Гамильтона — Якоби), изучается связь между корректностью задачи Коши для уравнений высокого порядка и систем и характеристичностью начальных поверхностей, решается вопрос об отыскании характеристических поверхностей. Результаты, полученные в этой главе (и особенно в § 2—4), существенно используются в гл. IV, V, XI. Они так часто бывают необходимы, что давно должны были бы найти отражение в обязательных университетских и вузовских курсах.

§ 1. Квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка

В случае двух независимых переменных $x=(x_1, x_2)$ это уравнение имеет вид

$$f_1(x, u)\,u'_{x_1}+f_2(x, u)\,u'_{x_2}=f_3(x, u). \qquad (1)$$

Решением уравнения (1) называется непрерывно дифференцируемая функция $u=u(x)$, обращающая уравнение в тождество. Пусть $\Omega\subset R^3_{(x,u)}$ — область, в которой рассматривается уравнение (1). Предполагается, что в Ω функции f_i непрерывно дифференцируемы и $f^2_1(x, u)+f^2_2(x, u)\neq 0$. Последнее означает, что уравнение (1) не вырождается и в каждой точке Ω является дифференциальным.

Исследование уравнения (1) сильно упрощается после перехода на язык геометрии. Уравнение (1) определяет в Ω гладкое невырожденное векторное поле $f=(f_1, f_2, f_3)$, $f_j=f_j(x, u)$, $1\leqslant j\leqslant 3$. Пусть $u=u(x)$ — решение уравнения (1). Вектор $\nu=(u'_{x_1}, u'_{x_2}, -1)$ ортогонален графику решения, а уравнение (1) означает, что скалярное произведение векторов f и ν равно нулю, т. е. эти векторы ортогональны. Последнее эквивалентно тому, что f лежит в касательной плоскости к графику решения. Таким образом доказана

Теорема 1. *Непрерывно дифференцируемая функция $u=u(x)$ тогда и только тогда является решением уравнения* (1), *когда ее график в каждой своей точке касается векторного поля f.*

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, порожденную векторным полем f:

$$\frac{dx_1}{d\tau}=f_1(x, u), \quad \frac{dx_2}{d\tau}=f_2(x, u), \quad \frac{du}{d\tau}=f_3(x, u). \tag{2}$$

Она называется *характеристической*, а фазовые кривые этой системы (проекции интегральных кривых в пространство $R^3_{(x,u)}$) — *характеристиками*. Соотношения (2) выражают тот факт, что вектор, касательный к фазовой кривой, пропорционален вектору f, т. е. характеристики касаются векторного поля f.

Лемма 1. *Если характеристика σ имеет общую точку с поверхностью S, являющейся графиком решения $u=u(x)$ уравнения* (1), *то она целиком принадлежит S.*

Доказательство. Пусть (x^0, u^0) — общая точка σ и S, τ_0 — значение параметра τ на σ, соответствующее этой точке. Обозначим через σ' кривую на $S: x_1=x_1(\tau)$, $x_2=x_2(\tau)$, $u=u(x_1(\tau), x_2(\tau))$, где $x_1(\tau)$, $x_2(\tau)$ определяются из системы:

$$\frac{dx_1}{d\tau}=f_1(x, u(x)), \quad \frac{dx_2}{d\tau}=f_2(x, u(x)), \quad x(\tau_0)=x^0. \tag{3}$$

В точках кривой σ' справедливы и соотношения (3), и уравнение (1). Подставляя (3) в (1), получаем, что вдоль σ' $du/d\tau=f_3$. Значит, σ' является фазовой кривой системы (2). А так как через любую точку (x, u) может проходить только одна фазовая кривая системы (2), то σ и σ' совпадают. ■

Пусть $\{\sigma_\xi\}$ — семейство гладких кривых в $R^3_{(x,u)}$, $\xi\in R^1$ — «номер» кривых этого семейства. Будем говорить, что *поверхность S составлена из кривых* σ_ξ, если через каждую точку поверхности S проходит некоторая кривая указанного семейства и эта кривая принадлежит S.

Теорема 2. *Непрерывно дифференцируемая функция $u=u(x)$ тогда и только тогда является решением уравнения* (1), *когда ее график составлен из характеристик.*

Доказательство. Пусть $u=u(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция и ее график S составлен из характеристик. Так как для любой точки $(x, u)\in S$ вектор $f=f(x, u)$ касается характеристики, проходящей через эту точку и принадлежащей S, то f лежит в касательной плоскости к S. Следовательно, в силу теоремы 1 функция u является решением уравнения (1). Наоборот, если $u=u(x)$ является решением уравнения (1), то через каждую точку ее графика S можно провести характеристику, которая в силу леммы 1 будет принадлежать S, т. е. S составлена из характеристик. ■

Таким образом, теорема 2 сводит нахождение решений квазилинейного уравнения к отысканию его характеристик. Она же позволяет и решить задачу Коши для квазилинейного уравнения, которая состоит в следующем. Пусть b — непрерывно дифференцируемая кривая в R^2_x (без самопересечений) и u_0 — непрерывно

дифференцируемая функция на b. *Решением задачи Коши* для уравнения (1) называется решение уравнения, принимающее заданные значения u_0 на b.

Обозначим через B кривую в $R^3_{(x,u)}$, являющуюся графиком функции u_0, определенной на b. *Точка* (x^0, u^0) *кривой* B *называется нехарактеристической*, если проекция $\bar{f}$ вектора $f(x^0, u^0)$ на плоскость $u=0$ не касается в точке x^0 кривой b (рис. 1). Пусть $x_1=x_1(\xi)$, $x_2=x_2(\xi)$, $\xi\in R^1$, — параметрическое задание кривой b, причем $x_1(\xi)$, $x_2(\xi)\in C^1$ и $(x'_{1_\xi})^2+(x'_{2_\xi})^2\neq 0$. Пусть $u=u_0(\xi)$ — значение функции u в точке $x(\xi)\in b$. Нехарактеристичность точки (x^0, u^0) означает, что

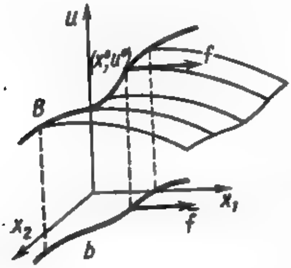

Рис. 1

$$\begin{vmatrix} x'_{1_\xi}(\xi_0), & x'_{2_\xi}(\xi_0) \\ f_1(x^0, u^0), & f_2(x^0, u^0) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{4}$$

Здесь ξ_0 — значение параметра ξ, соответствующее точке (x^0, u^0).

Теорема 3. *В некоторой окрестности нехарактеристической точки существует и единственно решение задачи Коши. График этого решения составлен из характеристик, выпущенных из точек кривой B (см. рис. 1).*

Доказательство. Проведем из точек кривой B характеристики. Для этого надо решить систему (2) с начальными условиями:

$$x_1|_{\tau=0}=x_1(\xi),\quad x_2|_{\tau=0}=x_2(\xi),\quad u|_{\tau=0}=u_0(\xi).$$

Получим зависящее от параметра ξ семейство характеристик:

$$x_1=x_1(\tau, \xi),\quad x_2=x_2(\tau, \xi),\quad u=u(\tau, \xi). \tag{5}$$

Если уравнения (5) определяют непрерывно дифференцируемую функцию $u=u(x)$, то в силу теоремы 2 эта функция будет искомым решением задачи Коши. В силу хорошо известных теорем о дифференцируемости решений обыкновенных дифференциальных уравнений по начальным условиям и параметру функции (5) будут непрерывно дифференцируемо зависеть от τ и ξ. Значит, для доказательства существования решения задачи Коши достаточно показать, что в некоторой окрестности точки $\tau=0$, $\xi=\xi_0$ первые два из соотношений (5) можно разрешить относительно τ и ξ. Для этого, в свою очередь, достаточно, чтобы при $\tau=0$, $\xi=\xi_0$ якобиан

$$\Delta=\begin{vmatrix} x'_{1_\xi}, & x'_{2_\xi} \\ x'_{1_\tau}, & x'_{2_\tau} \end{vmatrix} \tag{6}$$

был отличен от нуля. Отличие от нуля якобиана Δ следует из условия (4) и системы (2). Таким образом, доказано, что характе-

ристики, выпущенные из точек кривой B, определяют в окрестности точки $(x^0, u^0)\in B$ решение задачи Коши. Единственность этого решения вытекает из леммы 1, согласно которой график искомого решения должен содержать характеристики, выпущенные из точек кривой B. ■

Замечания. 1. Опишем ту окрестность $\omega\subset R^2_x$ точки x^0, в которой существует решение задачи Коши. Проекция характеристики в координатную плоскость (x_1, x_2) называется *лучом*. Грубо говоря, область ω можно определить как область, в которой лучи, выпущенные из разных точек начальной кривой b, не пересекаются. А точное утверждение, которое вытекает из доказательства теоремы 3, состоит в том, что в качестве ω можно выбрать область, в которой якобиан (6) перехода от лучевых координат (τ, ξ) к декартовым $x=(x_1, x_2)$ отличен от нуля. Отметим еще, что характеристики, из которых составлен график решения задачи Коши, зависят от значения функции u на b. Значит, лучи и область ω также зависят от значения u на b.

2. Полученные в этом параграфе результаты очевидным образом переносятся на случай n независимых переменных. Уравнение (1) в этом случае имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(x, u)\, u'_{x_j} = f_{n+1}(x, u), \tag{7}$$

где

$$x=(x_1, \ldots, x_n),\ (x, u)\in\Omega\subset R^{n+1}_{(x,u)} \text{ и } \sum_{j=1}^{n} f_j^2\neq 0 \text{ в } \Omega.$$

Оно определяет в Ω гладкое невырожденное векторное поле $f=(f_1, \ldots, f_{n+1})$. Характеристики определяются как фазовые кривые системы:

$$\frac{dx_j}{d\tau}=f_j(x, u),\ 1\leqslant j\leqslant n,\ \frac{du}{d\tau}=f_{n+1}(x, u).$$

В качестве начальных условий в задаче Коши для уравнения (7) задается значение функции u на некоторой гиперповерхности $b\subset R^n_x$ (размерности $n-1$). Для уравнения (7) справедливы точные аналоги теорем 1—3.

§ 2. Общие уравнения с частными производными первого порядка

Мы остановимся сначала на случае уравнений с двумя независимыми переменными $x=(x_1, x_2)$:

$$H(x_1, x_2, u, u'_{x_1}, u'_{x_2})=0, \tag{8}$$

где H — некоторая вещественнозначная дважды непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов, а решением называется дважды непрерывно дифференцируемая функция $u=u(x)$, обра-

щающая уравнение (8) в тождество. Обозначим

$$u'_{x_1} = p_1, \; u'_{x_2} = p_2 \text{ и } u'_x = (u'_{x_1}, u'_{x_2}), \; p = (p_1, p_2).$$

Тогда уравнение (8) перепишется в виде

$$H(x, u, p) = 0. \tag{9}$$

Предполагается, что в каждой точке области пространства $R^5_{(x,u,p)}$, в которой ищутся решения уравнения (8), выполнено условие:

$$(H'_{p_1})^2 + (H'_{p_2})^2 \neq 0. \tag{10}$$

Это означает, что рассматриваемое уравнение не вырождается и в каждой точке является дифференциальным.

Дадим геометрическую иллюстрацию уравнения (8) и его решений. Сделаем это кратко, поскольку в дальнейшем этими геометрическими представлениями мы пользоваться не будем. Уравнение (8) определяет в пространстве $R^3_{(x,u)}$ семейство конусов $K = K(x, u)$, называющихся *конусами нормалей*. Они зависят от точки (x, u) как от параметра. Конус K имеет вершину в точке (x, u) и состоит из прямых, проходящих через эту точку и параллельных векторам $(p_1, p_2, -1)$, где значения p_1 и p_2 связаны соотношением (9). Если $u = u(x)$ — гладкая функция и $S \subset R^3$ — ее график, то вектор нормали к S имеет вид $C(u'_{x_1}, u'_{x_2}, -1)$, $C = \text{const}$. Значит, дважды непрерывно дифференцируемая функция u тогда и только тогда будет решением уравнения (8), когда в каждой точке (x, u) ее графика S нормаль ν к S принадлежит $K(x, u)$. Пусть K — произвольный конус в R^3. Огибающая семейства плоскостей, ортогональных к образующим K, называется конусом, двойственным конусу K. Конус $K^* = K^*(x, u)$, двойственный конусу нормалей, называется *конусом Монжа*. Таким образом, дважды непрерывно дифференцируемая функция u тогда и только тогда будет решением уравнения (8), когда ее график S в каждой точке касается соответствующего конуса Монжа. Образующие, по которым S касается конуса Монжа, определяют на S векторное поле, из интегральных кривых которого составлена вся поверхность S (см. рис. 2). Однако, в отличие от квазилинейного случая, мы не знаем заранее, какой именно образующей конуса Монжа коснется поверхность S. Поэтому система обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющая характеристики, из которых составлена S, связывает не только (x_1, x_2, u), но и (p_1, p_2). Эту систему можно было бы получить из приведенных выше геометрических представлений. Мы выпишем ее без дополнительных

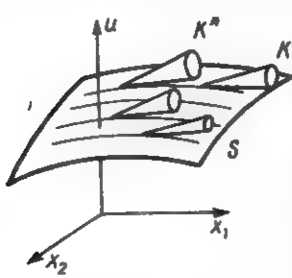

Рис. 2

пояснений, а затем подробно остановимся на ее отношении к уравнению (8).

Следующая *система* обыкновенных дифференциальных *уравнений называется характеристической*:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = H'_p(x, u, p), \\ \dfrac{du}{d\tau} = \langle p, H'_p(x, u, p)\rangle, \\ \dfrac{dp}{d\tau} = -H'_x(x, u, p) - pH'_u(x, u, p). \end{cases} \tag{11}$$

Здесь H'_p обозначает вектор (H'_{p_1}, H'_{p_2}), $H'_x = (H'_{x_1}, H'_{x_2})$, первая и третья строчки в (11) представляют собой равенства векторов и являются краткой записью следующих четырех уравнений:

$$\frac{dx_i}{d\tau} = H'_{p_i}, \ i=1, 2; \quad \frac{dp_i}{d\tau} = -H'_{x_i} - p_i H'_u, \ i=1, 2.$$

Скобками $<\cdot, \cdot>$ здесь и ниже обозначается скалярное произведение векторов.

Лемма 2. *Функция H является первым интегралом системы* (11), *т. е.* $H=\text{const}$ *вдоль решений системы* (11).

Доказательство. Производная $dH/d\tau$ в силу системы равна

$$\frac{dH}{d\tau} = \left\langle H'_x, \frac{dx}{d\tau}\right\rangle + H'_u\frac{du}{d\tau} + \left\langle H'_p, \frac{dp}{d\tau}\right\rangle.$$

Подставляя сюда выражения для производных по τ из системы (11), убеждаемся, что $dH/d\tau \equiv 0$. ■

Определение. Фазовые кривые системы (11) (проекции интегральных кривых в пространство $R^5_{(x,u,p)}$), вдоль которых $H\equiv 0$, называются *характеристическими полосами*, их проекции в $R^3_{(x,u)}$ называются *характеристиками* (несущими данную полосу), а проекции в R^2_x — *лучами*. Иногда характеристиками также называют характеристические полосы и любые фазовые и интегральные кривые системы (11).

Для системы (11) справедлива теорема существования и единственности, т. е. через каждую точку (x, u, p), такую, что

$$H(x, u, p) = 0, \tag{12}$$

проходит и притом единственная характеристическая полоса. Характеристики же не определяются однозначно точкой (x, u). Действительно, к любой точке (x, u) можно различными способами дописать вектор p так, чтобы было выполнено соотношение (12). Этим разным начальным наборам будут соответствовать, вообще говоря, разные характеристические полосы. Их проекции в $R^3_{(x,u)}$ определят, вообще говоря, разные характеристики, проходящие через одну и ту же точку (x, u).

Пусть $u=u(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Через Γ_u обозначим график вектор-функции (u, u'_x), т. е. множество точек $\{x_1, x_2, u(x), u'_{x_1}(x), u'_{x_2}(x)\}$ в $R^5_{(x,u,p)}$.

Лемма 3. *Если функция u является решением уравнения* (8) *и характеристическая полоса* Σ *имеет общую точку с* Γ_u, *то* Σ *целиком принадлежит* Γ_u *и, значит, несущая ее характеристика* σ *принадлежит графику S функции u.*

Доказательство. Пусть (x^0, u^0, p^0) — общая точка Σ и Γ_u и τ_0 — значение параметра τ на Σ, соответствующее этой точке. Обозначим через l кривую $x_1=\tilde{x}_1(\tau)$, $x_2=\tilde{x}_2(\tau)$ в R^2_x, где $\tilde{x}(\tau)$ определяется из системы

$$\frac{d\tilde{x}_i}{d\tau} = H'_{p_i}(\tilde{x}, u(\tilde{x}), u'_x(\tilde{x})),\ i=1, 2;\ \tilde{x}|_{\tau=\tau_0} = x^0. \tag{13}$$

Пусть Σ' — кривая на Γ_u, лежащая над l, т. е. Σ' задается уравнением

$$(x, u, p) = (\tilde{x}(\tau), \tilde{u}(\tau), \tilde{p}(\tau)), \tag{14}$$

где

$$\tilde{u}(\tau) = u(\tilde{x}(\tau)),\ \ \tilde{p}_i(\tau) = u'_{x_i}(\tilde{x}(\tau)),\ i=1, 2. \tag{15}$$

Для доказательства леммы 3 достаточно показать, что вектор-функция (14) удовлетворяет системе (11). Поскольку Σ и Σ' имеют общую точку, соответствующую значению параметра $\tau=\tau_0$, а для системы (11) справедлива теорема существования и единственности, то отсюда будет следовать, что фазовые кривые Σ и Σ' совпадают, т. е. $\Sigma\subset\Gamma_u$. Из (13) и (14) следует справедливость первого из уравнений системы (11) для вектор-функции (14). Дифференцируя первое из соотношений (15) и учитывая остальные равенства (15), получаем $d\tilde{u}/d\tau = \langle\tilde{p}, d\tilde{x}/d\tau\rangle$. Подставляя сюда уже доказанное для вектор-функции (14) первое из равенств (11), получаем для этой вектор-функции второе уравнение системы (11). Далее, функция u является решением уравнения (8). Дифференцируя это уравнение по x_1 и x_2, получаем

$$H'_{x_1} + H'_u p_1 + H'_{p_1}(p_1)'_{x_1} + H'_{p_2}(p_2)'_{x_1} = 0,$$

$$H'_{x_2} + H'_u p_2 + H'_{p_1}(p_1)'_{x_2} + H'_{p_2}(p_2)'_{x_2} = 0,$$

где $p_1 = u'_{x_1}$, $p_2 = u'_{x_2}$ и, значит, $(p_1)'_{x_2} = (p_2)'_{x_1}$. Заменим в первом уравнении $(p_2)'_{x_1}$ на $(p_1)'_{x_2}$, а во втором $(p_1)'_{x_2}$ — на $(p_2)'_{x_1}$ и подставим всюду $x = \tilde{x}(\tau)$. Учитывая (15), получим

$$(\tilde{p}_i)'_{x_1} H'_{p_1} + (\tilde{p}_i)'_{x_2} H'_{p_2} = -H'_{x_i} - \tilde{p}_i H'_u,\quad i=1, 2,$$

где производные от H берутся в точке (14). Левые части последних равенств в силу уже доказанного для вектор-функции (14) первого из соотношений (11) равны соответственно $d\tilde{p}_1/d\tau$ и $d\tilde{p}_2/d\tau$.

Это доказывает справедливость для вектор-функции (14) последнего равенства системы (11). ■

Будем говорить, что для функции $u=u(x)$ *график* Γ_u *вектор-функции* $(u, u'_x)=(u, u'_{x_1}, u'_{x_2})$ *составлен из характеристических полос*, если через каждую точку Γ_u проходит характеристическая полоса и эта полоса целиком принадлежит Γ_u. Другими словами, это означает, что график S функции u может быть так составлен из характеристик (напомним, что характеристики не определяются однозначно точкой (x_1, x_2, u), через которую они проходят), что вектор $p=(p_1, p_2)$, равный (u'_{x_1}, u'_{x_2}), будет дополнять характеристику до характеристической полосы.

Теорема 4. *Дважды непрерывно дифференцируемая функция* $u=u(x)$ *является решением уравнения* (8) *тогда и только тогда, когда график* Γ_u *вектор-функции* (u, u'_x) *составлен из характеристических полос.*

Доказательство. Пусть функция u — решение уравнения (8). Через каждую точку графика Γ_u можно провести характеристическую полосу, которая в силу леммы 3 будет принадлежать Γ_u, т. е. Γ_u составлена из характеристических полос. Наоборот, пусть функция u — дважды непрерывно дифференцируема и график Γ_u составлен из характеристических полос. Тогда график S функции составлен из характеристик, несущих эти характеристические полосы, и в каждой точке $(x, u)\in S$ вектор $u'_x=(u'_{x_1}, u'_{x_2})$ совпадает с компонентой $p=(p_1, p_2)$, дополняющей характеристику до характеристической полосы. А так как $H(x, u, p)=0$ вдоль характеристической полосы, то, значит, функция u удовлетворяет уравнению (8). ■

Пусть b — дважды непрерывно дифференцируемая кривая (без самопересечений) в R^2_x. Решение уравнения (8), совпадающее с заданной дважды непрерывно дифференцируемой функцией u_0 на b, называется *решением задачи Коши*. Пусть $x=x(\xi)$, $\xi\in R^1$, — параметрическое задание кривой b, где $x(\xi)\in C^2$, $(x'_{1\xi})^2+(x'_{2\xi})^2\neq 0$, и $u=u_0(\xi)$ — значение функции u_0 при $x=x(\xi)\in b$. Если известно значение u на b, то известна и производная от u по направлению кривой b. Это приводит к следующему соотношению для производных u'_{x_1}, u'_{x_2} в точках кривой b: $\langle u'_x, x'_\xi\rangle = (u_0)'_\xi$. Кроме того, если u — решение уравнения (8), то это уравнение должно быть выполнено, в частности, в точках кривой b. Получаем еще одно соотношение для u'_{x_1}, u'_{x_2} в точках b. Таким образом, задание решения уравнения (8) на b определяет в точках кривой b и производные $p_i(\xi)=u'_{x_i}(x)$, $x=x(\xi)\in b$, $i=1, 2$. Они находятся из системы

$$\begin{cases} \langle p, x'_\xi(\xi)\rangle = (u_0(\xi))'_\xi, \\ H(x(\xi), u_0(\xi), p)=0. \end{cases} \tag{16}$$

Пусть система (16) при $\xi\in[\alpha, \beta]$ имеет ровно M решений

$p=p^j(\xi)$, $1<j<M$, причем

$$\begin{vmatrix} (x_1(\xi))'_\xi, & (x_2(\xi))'_\xi \\ H'_{p_1}(x, u, p), & H'_{p_2}(x, u, p) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{17}$$

Здесь $x=x(\xi)$, $u=u_0(\xi)$, $p=p^j(\xi)$, $\xi\in[\alpha, \beta]$, $1<j<M$. Условие (17) обеспечивает возможность применения к системе (16) теоремы о неявной функции. Значит, существует $\varepsilon>0$ такое, что $p^j\in C^2$ при $\xi\in(\alpha-\varepsilon, \beta+\varepsilon)$. Через b' обозначим отрезок кривой b, для которого $\xi\in[\alpha, \beta]$.

Теорема 5. *Пусть система* (16) *при* $\xi\in[\alpha, \beta]$ *имеет ровно* M *решений, причем выполнено условие* (17). *Тогда в некоторой окрестности* $\omega\subset R^2_x$ *отрезка* b' *задача Коши*

$$H(x, u, u'_x)=0, \quad u(x)=u_0(\xi) \quad \text{при} \quad x=x(\xi)\in b \tag{18}$$

имеет ровно M *решений. Графики вектор-функций* (u, u'_x) *для этих решений составлены из характеристических полос системы* (11), *выпущенных из точек*

$$(x, u, p)|_{\tau=0}=(x(\xi), u_0(\xi), p^j(\xi)), \quad 1\leqslant j<M, \quad \alpha-\varepsilon<\xi<\beta+\varepsilon. \tag{19}$$

Доказательство. Существование. Как уже отмечалось, решения $p^j(\xi)$ системы (16) определены и являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями ξ в некоторой окрестности отрезка $[\alpha, \beta]$. Проведем характеристические полосы с начальными данными (19). Зафиксируем $j\in[1, M]$ и в дальнейшем этот индекс всюду ниже будем опускать. Из стандартных теорем существования и единственности решения и дифференцируемости решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений по начальным данным вытекает, что решение

$$(x, u, p)=(x(\tau, \xi), \quad u(\tau, \xi), \quad p(\tau, \xi)) \tag{20}$$

системы (11) с начальными условиями (19) определено и является непрерывно дифференцируемой функцией τ, ξ при $|\tau|<\varepsilon_1$, $\alpha-\varepsilon_2<\xi<\beta+\varepsilon_2$, если ε_1 и ε_2 достаточно малы.

Определяемый формулой (20) переход от лучевых координат (τ, ξ) к декартовым $x=(x_1, x_2)$:

$$x=x(\tau, \xi) \tag{21}$$

является невырожденным в некоторой окрестности $\omega\subset R_x^2$ отрезка b' кривой b. Действительно, из системы (11) и условия (17) следует, что при $\tau=0$ и $\xi\in[\alpha, \beta]$, то есть при $x\in b'$, якобиан замены (21) отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} (x_1)'_\tau, & (x_2)'_\tau \\ (x_1)'_\xi, & (x_2)'_\xi \end{vmatrix} \neq 0. \tag{22}$$

Значит, это же верно и в некоторой окрестности ω отрезка b'. Тогда при $x\in\omega$ систему (21) можно разрешить относительно

(τ, ξ), и равенства (20) будут определять в этой окрестности (u, p) как непрерывно дифференцируемую функцию x. График построенной функции u состоит из характеристик. Если мы покажем, что при этом

$$(u'_{x_1}, u'_{x_2}) = (p_1, p_2), \tag{23}$$

то это будет означать, во-первых, что функции u'_{x_1}, u'_{x_2} непрерывно дифференцируемы, т. е. функция u — дважды непрерывно дифференцируема, и, во-вторых, что график вектор-функции (u, u'_x) составлен из характеристических полос (20), и, значит, функция u в силу теоремы 4 является решением задачи Коши.

Для того чтобы показать справедливость соотношения (23), рассмотрим следующие две комбинации $U=U(\tau, \xi)$ и $V=V(\tau, \xi)$ решений (20) системы (11):

$$\begin{cases} U = u'_\xi - \langle p, x'_\xi \rangle, \\ V = u'_\tau - \langle p, x'_\tau \rangle. \end{cases} \tag{24}$$

Как уже отмечалось, в ω замена переменных (21) невырождена, и, значит, для построенной функции u справедливы равенства

$$u'_\xi = \langle u'_x, x'_\xi \rangle, \quad u'_\tau = \langle u'_x, x'_\tau \rangle.$$

Отсюда в силу (22) будет вытекать (23), если $U \equiv V \equiv 0$. Таким образом, для доказательства существования M решений задачи Коши (18), для которых графики вектор-функций (u, u'_x) составлены из характеристических полос, выпущенных из точек (19), достаточно показать, что $U \equiv V \equiv 0$.

Тот факт, что $V \equiv 0$, непосредственно следует из системы (11). Про U известно пока только, что $U|_{\tau=0}=0$. Это вытекает из первого уравнения системы (16). Как уже отмечалось, решение (20) задачи (11), (19) непрерывно дифференцируемо по τ и ξ. Тогда правые, а значит, и левые части системы (11) обладают этим свойством. Таким образом, существуют и являются непрерывными производные $\partial^2 x/\partial\tau\partial\xi$, $\partial^2 u/\partial\tau\partial\xi$. Дифференцируя первое из равенств (24) по τ, а второе — по ξ и вычитая одно из другого, получаем

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial V}{\partial \xi} = -\langle p'_\tau, x'_\xi \rangle + \langle p'_\xi, x'_\tau \rangle.$$

Подставляя сюда значения p'_τ и x'_τ из системы (11) и учитывая, что $V \equiv 0$, находим

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \langle H'_x, x'_\xi \rangle + \langle p, x'_\xi \rangle H'_u + \langle p'_\xi, H'_p \rangle.$$

С другой стороны, продифференцировав по ξ тождество $H \equiv 0$, получим, что

$$\langle H'_x, x'_\xi \rangle + H'_u u'_\xi + \langle H'_p, p'_\xi \rangle = 0.$$

Значит, $\partial U/\partial\tau = -H'_u U$. При фиксированном ξ это уравнение является линейным обыкновенным дифференциальным уравнением относительно U как функции τ. Вместе с условием $U|_{\tau=0}=0$ это приводит к тому, что $U\equiv 0$. Существование интересующих нас решений задачи Коши доказано.

Единственность построенных решений является следствием теоремы о единственности решений характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений (11), поскольку для любого решения u график вектор-функции (u, u'_x) в силу теоремы 4 составлен из характеристических полос, а задание функции u на b приводит, как это было показано при выводе системы (16), к заданию начальных точек для этих характеристических полос. ■

Замечания. 1. Как и в случае квазилинейного уравнения, легко описать ту окрестность $\omega\subset R^2_x$ отрезка b' кривой b, в которой существует решение задачи Коши (18). Из доказательства теоремы 4 видно, что в качестве ω можно взять область, в которой якобиан (22) перехода от лучевых координат (τ, ξ) к декартовым отличен от нуля. Несколько неточно эту область можно определить как такую, в которой лучи, выпущенные из разных точек начальной кривой, не пересекаются.

2. Полученные результаты очевидным образом переносятся на случай n независимых переменных $x=(x_1, ..., x_n)\in R^n$. Уравнение (8) в этом случае имеет вид

$$H(x, u, p)=0, \tag{25}$$

где $p=(p_1, ..., p_n)$, $p_j=\partial u/\partial x_j$, функция H — вещественнозначная и $\Sigma (H'_{p_j})^2\neq 0$. Характеристическая система обыкновенных дифференциальных уравнений теперь состоит из $2n+1$ уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = H'_p(x, u, p), \\ \dfrac{du}{d\tau} = \langle p, H'_p(x, u, p)\rangle, \\ \dfrac{dp}{d\tau} = -H'_x(x, u, p) - p\,H'_u(x, u, p). \end{cases} \tag{26}$$

Здесь H'_p — это вектор $(H'_{p_1}, \ldots, H'_{p_n})$, аналогичный смысл имеет H'_x. Один раз, для ясности, мы распишем эту систему покоординатно:

$$\frac{dx_i}{d\tau} = H'_{p_i}(x, u, p), \quad 1\leqslant i\leqslant n,$$

$$\frac{du}{d\tau} = \Sigma\, p_i H'_{p_i}(x, u, p),$$

$$\frac{dp_i}{d\tau} = -H'_{x_i}(x, u, p) - p_i H'_u(x, u, p), \ 1\leqslant i\leqslant n.$$

График Γ_u вектор-функции (u, u'_x) будет n-мерной поверхностью в R^{2n+1}. Начальные данные задачи Коши задаются теперь на дважды непрерывно дифференцируемой $(n-1)$-мерной поверхности * b в R^n_x. Пусть b задано уравнениями $x=x(\xi)$, $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in R^{n-1}$, где $x(\xi) \in C^2(R^{n-1})$ и ранг матрицы Якоби $\partial x/\partial \xi$ равен $n-1$. Пусть $u=u_0(\xi)$ при $x=x(\xi) \in b$, $u_0 \in C^2(R^{n-1})$. Тогда значения на b производных от решений уравнения (25): $p(\xi) = u'_x(x)$, $x=x(\xi) \in b$ будут решениями системы, аналогичной системе (16),

$$\begin{cases} \langle p, x'_{\xi_i}(\xi) \rangle = u'_{0_{\xi_i}}(\xi), & 1 \leqslant i \leqslant n-1, \\ H(x(\xi), u_0(\xi), p) = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Леммы 2, 3 и теоремы 4, 5 при $x \in R^n$, $n > 2$, доказываются абсолютно так же, как и при $n=2$. Так, теорема 5 в этом случае будет иметь следующий вид. Пусть U — ограниченная область в R^{n-1} и система (27) при $\xi \in \bar{U}$ имеет ровно M решений, $p=p^j(\xi)$, $1 < j < M$, причем при $\xi \in \bar{U}$ и $p=p^j(\xi)$

$$\begin{vmatrix} [x_1(\xi)]'_{\xi_1}, & \ldots & [x_n(\xi)]'_{\xi_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ [x_1(\xi)]'_{\xi_{n-1}}, & \ldots & [x_n(\xi)]'_{\xi_{n-1}} \\ H'_{p_1}(x(\xi), u_0(\xi), p), & \ldots & H'_{p_n}(x(\xi), u_0(\xi), p) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{28}$$

Это условие обеспечивает возможность применения к системе (27) теоремы о неявной функции, так что функции $p^j(\xi)$ будут определены и непрерывно дифференцируемы (при соответствующей нумерации), когда ξ принадлежит некоторой окрестности U_ε компакта $\bar{U}$. Через b' обозначим часть поверхности b, для которой $\xi \in \bar{U}$.

Теорема 5'. *Пусть система* (27) *при каждом* $\xi \in \bar{U}$ *имеет ровно* M *решений* $p=p^j(\xi)$, *причем выполнено условие* (28). *Тогда в некоторой окрестности* $\omega \subset R^n_x$ *поверхности* b' *задача Коши*

$$H(x, u, u'_x) = 0, \quad u(x) = u_0(\xi) \text{ при } x = x(\xi) \in b$$

имеет ровно M *решений. Графики вектор-функций* (u, u'_x) *для этих решений составлены из характеристических полос, выпущенных из точек*

$$(x, u, p)|_{\tau=0} = (x(\xi), u_0(\xi), p^j(\xi)), \; 1 \leqslant j \leqslant M, \; \xi \in U_\varepsilon. \tag{29}$$

3. Есть два часто встречающихся случая, когда условия теоремы 5 и теоремы 5' можно упростить: если $u_0(\xi) = u_0 = \mathrm{const}$ или поверхность b параллельна одной из координатных гиперплоскостей.

---

* Под поверхностью здесь и всюду ниже понимается (гладкая) поверхность без самопересечений.

Если $u_0(\xi)=u_0=\text{const}$, то первые $(n-1)$ уравнения системы (27) означают, что вектор p ортогонален b, т. е. $p=C(\xi)p^0(\xi)$, где $C(\xi)\in R^1$, а $p^0(\xi)$ — вектор нормали (в R^n) к b единичной длины. Направление вектора $p^0(\xi)$ выберем произвольным, но непрерывно зависящим от ξ. Таким образом, в рассматриваемом случае система (27) эквивалентна уравнению

$$H(x(\xi),\ u_0,\ Cp^0(\xi))=0 \tag{30}$$

для функции $C=C(\xi)$. Пусть $C=C_j(\xi)$, $\xi\in\overline{U}$, $1<j<M$, — ее решения. Тогда $p^j(\xi)=C_j(\xi)p^0(\xi)$, а условие (28) превращается в следующее:

$$\frac{d}{dC}H(x(\xi),\ u_0,\ Cp^0(\xi))\neq 0 \text{ при } C=C_j(\xi),\ \xi\in\overline{U},\ 1\leqslant j\leqslant M. \tag{31}$$

Действительно, поскольку $x=x(\xi)$ — уравнение поверхности b и ранг матрицы $\partial x/\partial\xi$ равен $n-1$, то векторы $x'_{\xi_j}(\xi)$ лежат в касательной плоскости к b и линейно независимы. Значит, условие (28) эквивалентно требованию трансверсальности b и вектора $\nabla_p H$, т. е. условию

$$\langle p^0(\xi),\ \nabla_p H(x(\xi),\ u_0,\ C_j(\xi)p^0(\xi))\rangle\neq 0,\ \xi\in\overline{U},\ 1<j\leqslant M.$$

Последнее, очевидно, совпадает с условием (31).

Рассмотрим теперь случай, когда поверхность b параллельна одной из координатных гиперплоскостей. Пусть, например, b совпадает с гиперплоскостью $x_1=a=\text{const}$. Тогда в качестве локальных координат на b можно взять $\xi=x'=(x_2,\ldots,x_n)$. В этом случае первые $(n-1)$ уравнений системы (27) будут определять $p'=(p_2,\ldots,p_n)$ при $x\in b$: $p_j(x')=\partial u_0(x')/\partial x_j$, $j\geqslant 2$. Таким образом, в рассматриваемом случае система (27) эквивалентна уравнению

$$H(a,x',u_0(x'),p_1,p'(x'))=0 \tag{32}$$

для p_1, а условие (28) эквивалентно требованию простоты корней этого уравнения: $H'_{p_1}\neq 0$ в корнях уравнения (32).

§ 3. Уравнение Гамильтона — Якоби

Уравнение Гамильтона — Якоби имеет вид

$$H(x,p)=0,\quad p=u'_x. \tag{33}$$

Это частный (и очень важный) случай уравнения, рассмотренного в предыдущем параграфе. Уравнение (33) отличается от уравнения (25) только тем, что функция H (вещественнозначная) в (33) не зависит явно от u. Конечно, все результаты предыдущего параграфа остаются справедливыми и для уравнения (33), но теперь характеристическая система (26) распадается на две: на $2n$ уравнений для функций (x, p) и одно, из которого находится функ-

ция u:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = H'_p(x,\ p), \\ \dfrac{dp}{d\tau} = -H'_x(x,\ p), \end{cases} \tag{34}$$

$$\frac{du}{d\tau} = \langle p,\ H'_p(x,\ p)\rangle. \tag{35}$$

Функция $H=H(x,\ p)$ называется *гамильтонианом*, система (34) называется *системой Гамильтона*, а ее фазовые кривые (проекции интегральных кривых в $R^{2n}{}_{(x,p)}$) — *бихарактеристиками*.

Согласно теореме 5′ решение задачи Коши (33) сводится к отысканию характеристических полос системы (34), (35). Поскольку эта система распалась, мы можем сначала из системы Гамильтона (34) и начальных данных (29) определить бихарактеристики, а затем, интегрируя вдоль них уравнение (35), найти $u(x)$. В этом и заключается основное отличие рассматриваемой ситуации от общего случая. Прежде чем сформулировать теорему 5′ применительно к задаче (33), сделаем еще несколько замечаний. Точно так же, как и лемма 2, доказывается

Лемма 4. *Гамильтониан H является первым интегралом системы Гамильтона.*

Бихарактеристики системы Гамильтона (34), вдоль которых $H\equiv 0$, называются *нулевыми*, а их проекции в $R^n{}_x$ — *лучами*. Очевидно, проекции характеристических полос системы (34), (35) в $R^{2n}{}_{(x,p)}$ являются нулевыми бихарактеристиками и любая нулевая бихарактеристика может быть дополнена с помощью решения уравнения (35) до характеристической полосы. В частности, отсюда следует, что данное выше определение луча совпадает с определением, приведенным в § 2.

Пусть, как и раньше, b — дважды непрерывно дифференцируемая гиперповерхность в R^n, заданная параметрически: $x=x(\xi)$, $\xi\in R^{n-1}$, где $x(\xi)\in C^2(R^{n-1})$ и $\operatorname{rank} \partial x/\partial\xi = n-1$. Пусть $u=u_0(\xi)$ — значение функции u при $x=x(\xi)$ и U — ограниченная область в R^{n-1} такая, что система (27) при $\xi\in\bar{U}$ имеет ровно M решений $p=p^j(\xi)$, $1\leqslant j\leqslant M$, причем при $\xi\in\bar{U}$ выполнено условие (28). Через b' обозначим часть поверхности b, для которой $\xi\in U$. Как и в § 2, из (28) следует, что функции $p^j=p^j(\xi)$ будут определены и непрерывно дифференцируемы, когда ξ принадлежит некоторой окрестности U_* компакта $\bar{U}$. Решая систему (34) с начальными условиями

$$(x,\ p)\,|_{\tau=0} = (x(\xi),\ p^j(\xi)), \quad 1\leqslant j\leqslant M,\ \xi\in U_*, \tag{36}$$

получаем M семейств бихарактеристик $x=x^j(\tau,\ \xi)$, $p=p^j(\tau,\ \xi)$ и соответствующих им лучей $x=x^j(\tau, \xi)$. Из последнего уравнения системы (27) следует, что построенные бихарактеристики нулевые.

Пусть ω — область в $R^n{}_x$, определенная в замечании 1 к § 2, т. е. содержащая b' область, в которой отличны от нуля якобианы перехода $(\tau, \xi)\to x=x^j(\tau, \xi)$ от лучевых координат к декартовым (для каждого семейства лучей). Таким образом, в области ω имеется M семейств выходящих из b лучей $x=x^j(\tau, \xi)$, причем через каждую точку $x\in\omega$ проходит ровно по одному лучу каждого семейства. Пусть $x^j{}_0=x^j{}_0(x)$ — точка на b, из которой этот луч выходит. Отрезок этого луча, заключенный между точками $x^j{}_0$ и x, обозначим через $l^j{}_x$, а соответствующий отрезок бихарактеристики — через $L^j{}_x$. Из теоремы 5′ следует

Теорема 6. *Пусть система* (27) *при каждом* $\xi\in O$ *имеет ровно* M *решений, причем выполнено условие* (28). *Тогда существует такая окрестность* $\omega\subset R^n{}_x$ *поверхности* b', *в которой имеется* M *семейств лучей* $x=x^j(\tau,\xi)$ *системы* (34), *отвечающих бихарактеристикам с начальными условиями* (36), *причем через каждую точку* $x\in\omega$ *проходит ровно по одному лучу каждого семейства и* $D(x^j(\tau, \xi))/D(\tau, \xi)\neq 0$ *при* $x\in\omega$.

В области ω *задача Коши*

$$H(x, u'_x)=0, \quad u(x)=u_0(\xi) \text{ при } x=x(\xi)\in b$$

имеет ровно M *решений* $u=u^j(x)$. *Эти решения равны*

$$u^j(x)=u(x_0^j)+\int\limits_{L_x^j}\langle p, dx\rangle, \quad x\in\omega. \tag{37}$$

и $\nabla u^j(x)=p$, *где* $(x, p)\in L^j{}_x$.

Замечания. 1. Поскольку теоремы 5, 5′ и теорема 6 доказываются при одних и тех же предположениях о решениях системы (27), то замечание 3 к § 2 позволяет упрощать также и условия теоремы 6.

2. Довольно распространена ситуация, когда функция Гамильтона $H=H(x,p)$ однородна по переменной p. Тогда формула (37) упрощается и принимает вид $u^j(x)=u(x^j{}_0)$, т. е. функции u — постоянна вдоль лучей. Действительно, если ν — порядок однородности функции H по переменной p, то

$$\int\limits_{L_x^j}\langle p, dx\rangle = \int\limits_{L_x^j}\langle p, H'_p\rangle\, d\tau=\nu \int\limits_{L_x^j} H(x, p)\, d\tau=0.$$

Первое равенство следует из (34), второе — из однородности H, а третье вытекает из леммы 4 и последнего уравнения системы (27), определяющей начальную точку (36) бихарактеристики $L^j{}_x$.

3. В геометрической оптике уравнение Гамильтона — Якоби называется *уравнением эйконала*, функция u — *оптической длиной пути*, а ее поверхности уровня — *фронтами волн*.

§ 4. Пример. Распространение световых волн в неоднородной среде

В этом параграфе мы дадим пример использования развитой в предыдущем параграфе техники, а именно решим задачу Коши для уравнения

$$(u'_{x_1})^2 + (u'_{x_2})^2 = n(x_1, x_2), \qquad (38)$$

где $n \in C^\infty(R^2)$, $n(x_1, x_2) > 0$. Это уравнение возникает при изучении высокочастотных установившихся колебаний. Действительно, если $v = v(t, x_1, x_2)$ — решение волнового уравнения

$$n(x_1, x_2) v''_{tt} = v''_{x_1 x_1} + v''_{x_2 x_2}$$

с переменным коэффициентом преломления $n(x_1, x_2)$ и v имеет вид $v(t, x_1, x_2) = \exp(ikt) w(x_1, x_2)$, то амплитуда w является решением *уравнения Гельмгольца*

$$w''_{x_1 x_1} + w''_{x_2 x_2} + k^2 n(x_1, x_2) w = 0.$$

Последнее уравнение при больших k имеет формальное асимптотическое решение вида

$$w \sim e^{ikS(x)} \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x) (ik)^{-j}, \quad x = (x_1, x_2). \qquad (39)$$

Подставив функцию (39) в уравнение Гельмгольца, сократив на $\exp(ikS)$, собрав вместе члены при одинаковых степенях (ik) и приравняв их нулю, получим уравнения для определения функций S и φ_j. В частности, приравняв нулю коэффициент при старшей степени (ik) (при $(ik)^2$), получим уравнение (38) для фазы S. Напомним, что уравнение (38) называется *уравнением эйконала*, линии уровня функции S — *фронтами волн*, а проекции в R^2_x фазовых траекторий системы (34) — *лучами*.

Пусть известен некоторый гладкий волновой фронт, т. е. $S = a = \text{const}$ на некоторой гладкой кривой b в R^2_x, заданной параметрически $x = x(\xi)$, $\xi \in R^1$, $x \in C^\infty(R^1)$. Мы приходим к задаче Коши для фазы S:

$$(S'_{x_1})^2 + (S'_{x_2})^2 = n(x), \quad S(x(\xi)) = a. \qquad (40)$$

Метод решения этой задачи дается теоремой 6 и замечанием 1 к ней и состоит в следующем. Выписываем уравнение (30). В рассматриваемой ситуации оно имеет вид $C^2(\xi) = n(x(\xi))$ и имеет два решения $C = \pm\sqrt{n(x(\xi))}$. Значит, решениями системы (16) будут

$$p^1(\xi) = \sqrt{n(x(\xi))}\, p^0(\xi), \; p^2(\xi) = -\sqrt{n(x(\xi))}\, p^0(\xi),$$

где $p^0(\xi)$ — единичный вектор нормали к b, направление которого выбирается произвольно, но непрерывно от ξ. При этом условие

(31), очевидно, выполнено. Значит, задача (40) в некоторой окрестности b имеет два решения. Они соответствуют волнам с фронтом b, распространяющимся в одну или другую сторону от b. Для того чтобы построить указанные решения, выписываем систему Гамильтона (34). В нашем случае она имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_i}{d\tau} = 2p_i, & i = 1, 2, \\ \dfrac{dp_i}{d\tau} = n'_{x_i}(x), & i = 1, 2. \end{cases} \tag{41}$$

Решив эту систему с начальными данными

$$x|_{\tau=0} = x(\xi), \ p|_{\tau=0} = p^j(\xi), \ j = 1, 2,$$

находим два семейства бихарактеристик:

$$x = x^j(\tau, \xi), \ p = p^j(\tau, \xi), \ j = 1, 2, \tag{42}$$

проекции которых в R^2_x называются лучами. Пусть ω^j — окрестность b, в которой якобиан (22) для $x = x^j(\tau, \xi)$ отличен от нуля. Решения $S = S^j(x)$, $j = 1, 2$, будут определены при $x \in \omega^j$, $j = 1, 2$. Зафиксируем индекс j и всюду ниже будем его опускать.

В каждую точку $x \in \omega$ приходит ровно один луч l того семейства лучей, которое соответствует фиксированному j. Пусть l_x — отрезок этого луча между b и точкой x, а L_x — соответствующий отрезок бихарактеристики. Тогда для определения решений рассматриваемой задачи можно воспользоваться любой из формул

$$S(x) = a + \int_{L_x} \langle p, dx \rangle = a + \int_{l_x} \sqrt{n(x)}\, dl, \quad x \in \omega,$$

где p и x на L_x имеют вид (42), а dl — элемент длины луча l_x. Последнее равенство вытекает из уравнений (41) и леммы 4. Оставляем проверку этого факта читателю.

§ 5. Характеристические поверхности для дифференциальных операторов высокого порядка, связь с корректностью задачи Коши

Пусть $P(x, p)$ — многочлен порядка m по переменным $p = (p_1, \ldots, p_n)$, коэффициентами которого являются бесконечно дифференцируемые функции $x = (x_1, \ldots, x_n)$, и пусть $i\partial/\partial x = (i\partial/\partial x_1, \ldots, i\partial/\partial x_n)$. Тогда $P(x, i\partial/\partial x)$ — *линейный дифференциальный оператор с характеристическим многочленом* $P(x, p)$. Через $H = H(x, p)$ обозначим *старшую однородную часть многочлена* $P(x, p)$, т. е. сумму тех одночленов многочлена P, степень которых равна m.

Пусть S — гиперповерхность в R^n_x, задаваемая уравнением $s(x) = 0$, $s \in C^\infty(R^n)$, $\operatorname{Im} s \equiv 0$, $\nabla s(x) \neq 0$ на S, а $l = l(x)$ — бесконечно дифференцируемое векторное поле в n-мерной окрестности U

точки $x_0 \in S$, трансверсальное S. Полуокрестностью U_+ точки $x_0 \in S$ будем называть множество точек $\{x : x \in U, s(x) > 0\}$.

Определение. *Решением* (локальной) *задачи Коши* для оператора P называется функция $u \in C^m(\bar{U}_+)$, удовлетворяющая условиям:

$$\begin{cases} P\left(x, i\frac{\partial}{\partial x}\right)u = f, \ x \in U_+, \\ \frac{\partial^j u}{\partial l^j} = \varphi_j, \ x \in S \cap U, \ 0 \leqslant j \leqslant m-1, \end{cases} \tag{43}$$

где f, φ_j — заданные функции.

Определение. *Направление вектора* $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ называется *характеристическим* в точке x (для оператора P), если $H(x, \nu) = 0$. *Поверхность S называется характеристической* в точке $x \in S$, если вектор ν нормали к S в этой точке имеет характеристическое направление. *Поверхность* называется *характеристической* (для оператора P), если она характеристична в каждо точке.

Заметим, что в силу однородности функции H по второму аргументу длина вектора ν в этом определении не играет роли. В частности, в качестве ν можно взять вектор $\nabla s(x)$. Значит, приведенное выше определение эквивалентно следующему.

Определение. *Поверхность S* называется *характеристической*, если

$$H(x, \nabla s(x)) = 0, \quad x \in S.$$

Из сказанного выше следует, что характеристичность поверхности S не зависит от выбора функции $s(x)$, задающей эту поверхность; нужно только, чтобы $\nabla s(x) \neq 0$ при $s(x) = 0$.

Пусть поверхность S записана в параметрическом виде

$$x = x(\xi), \ \xi \in R^{n-1}, \tag{44}$$

где $x(\xi) \in C^\infty$ и ранг матрицы Якоби $\partial x/\partial \xi$ равен $n-1$. Говорят, что Q — линейный дифференциальный оператор на S (действующий на функции, определенные на S), если для любой функции φ, определенной на S,

$$Q\varphi|_{x=x(\xi)} = Q\left(\xi, \ i\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\varphi(x(\xi)),$$

где $Q(\xi, i\partial/\partial\xi)$ — линейный дифференциальный оператор в R^{n-1}.

Для простоты будем считать, что в окрестности $\bar{U}$ поверхность S может быть записана в виде (44).

Теорема 7. *Пусть поверхность S — характеристическая. Тогда существуют такие, зависящие только от P, S и l, и не все тождественно равные нулю дифференциальные операторы Q_j на S порядка не выше j, что правые части задачи Коши* (43) *для*

любой функции $u \in C^m(\bar{U}_+)$ связаны соотношением

$$\sum_{j=0}^{m-1} Q_{m-j}\varphi_j = f, \quad x \in S \cap U. \tag{45}$$

Доказательство. В некоторой окрестности начальной поверхности S построим фазовые кривые L векторного поля $l = l(x)$.

Для этого решим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{ds} = \frac{l(x)}{|l(x)|}, \ x|_{s=0} = x(\xi) \in S. \tag{46}$$

При достаточно малых $|s|$ решение $x = x(s, \xi)$ этой задачи существует, единственно и бесконечно дифференцируемо зависит от s и ξ. Фазовые кривые $L = L(\xi)$ системы (46) в каждой точке касаются соответствующего вектора $l = l(x)$.

В окрестности поверхности S введем криволинейные координаты (s, ξ). В этих координатах поверхность S задается уравнением $s = 0$, а кривые L переходят в прямые, параллельные оси s. При этом оператор дифференцирования $\partial/\partial l$, равный $\langle l/|l|, \partial/\partial x \rangle$, переходит в $\partial/\partial s$. Замена переменных $(s, \xi) \to x = x(s, \xi)$ бесконечно дифференцируема. Покажем, что при $|s|$ достаточно малых она невырождена. Для этого рассмотрим при $s = 0$ матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \partial x_1/\partial s, & \ldots, & \partial x_n/\partial s \\ \partial x_1/\partial \xi_1 & \ldots, & \partial x_n/\partial \xi_1 \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \partial x_1/\partial \xi_{n-1}, & \ldots, & \partial x_n/\partial \xi_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Матрица, получающаяся из A вычеркиванием первой строки, имеет ранг $n-1$ (см. (44)). Если бы $\det A = 0$ при $s = 0$, то первая строчка A должна была бы быть линейной комбинацией остальных. Но это невозможно, поскольку в силу (46) первая строчка матрицы A равна $l(x)/|l(x)|$ и этот вектор трансверсален S, а остальные строчки матрицы A представляют собой векторы, лежащие в касательной плоскости к S. Таким образом, замена переменных $(s, \xi) \to x = x(s, \xi)$ невырождена при $s = 0$ и, значит, в некоторой окрестности V поверхности S. Перейдя в $V \cap \bar{U}_+$ к новым переменным, получим из (43) задачу:

$$\begin{cases} Q\left(s, \xi, i\dfrac{\partial}{\partial s}, \ i\dfrac{\partial}{\partial \xi}\right)u = f, \ s > 0, \\ \dfrac{\partial^j u}{\partial s^j} = \varphi_j, \ s = 0, \ 0 \leqslant j \leqslant m-1, \end{cases} \tag{47}$$

где Q — дифференциальный оператор порядка m.

Найдем явный вид коэффициента $a = a(s, \xi)$, стоящего при производной $i^m \partial^m u/\partial s^m$ в операторе Q. Для этого заметим, что

после перехода к координатам (s, ξ)

$$\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial s^{|\alpha|}} \left[\left(\frac{\partial s}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial x_2} \right)^{\alpha_2} \cdot \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \cdot \left(\frac{\partial s}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} \right] + \ldots \tag{48}$$

Здесь $s=s(x)$, уравнение $s(x)=0$ определяет поверхность S, а многоточием обозначены слагаемые, содержащие производные от u по s и ξ порядка не выше $|\alpha|$, в которых дифференцирование по s имеет порядок не выше $|\alpha|-1$. Формула (48) легко проверяется индукцией по $|\alpha|$. Из (48) следует, что

$$a = H(x, \nabla s(x)).$$

Если поверхность S характеристическая, то $a(0, \xi)=0$. Тогда при $s=0$ оператор Q имеет вид

$$Q\left(0, \xi, i\frac{\partial}{\partial s}, i\frac{\partial}{\partial \xi}\right) = \sum_{j=1}^{m} Q_j\left(\xi, i\frac{\partial}{\partial \xi}\right) \frac{\partial^{m-j}}{\partial s^{m-j}},$$

где Q_j — дифференциальные операторы порядка не выше j. Отсюда и из (47) следует утверждение теоремы. ■

В силу теоремы 7 если начальная поверхность S характеристична, то задача Коши (43) некорректна, поскольку существуют бесконечно дифференцируемые функции f, φ_j, для которых соотношение (45) не выполняется, и, значит, задача (43) не имеет решений. Корректность задачи Коши (43), когда поверхность S нехарактеристична, зависит от вида оператора P и пространств, в которых рассматриваются решения и правые части задачи. Этот вопрос мы здесь обсуждать не будем.

Системы уравнений. Если оператор $P(x, i\partial/\partial x)$ является матричным, постановка задачи Коши и определение характеристических поверхностей остаются прежними. Только теперь u, f, φ_j — вектор-функции (из d компонент), а $H(x, p) = \det P_0(x, p)$, где $P_0(x, p)$ — старшая однородная часть характеристической матрицы $P(x, p)$, которая определяется следующим образом. Если $P(x, p) = (P_{ij}(x, p))$, $1 \leqslant i, j \leqslant d$, где P_{ij} являются многочленами по p порядка не выше m, то $P_0(x, p) = (P^0{}_{ij}(x, p))$, $1 \leqslant i, j \leqslant d$, где $P^0{}_{ij}$ — сумма одночленов многочлена P_{ij} порядка ровно m. Справедлив аналог теоремы 7.

Теорема 7'. *Если $P(x, i\partial/\partial x)$ — матричный оператор и поверхность S характеристична, то существуют такие, зависящие только от P, S и l векторы $R_j = (R_{j1}, \ldots, R_{jd})$, $0 \leqslant j \leqslant m$, из дифференциальных операторов R_j, на S порядка не выше j, что правые части задачи Коши* (43) *для любой вектор-функции $u \in C^m(\bar{U}_+)$*

связаны соотношением

$$\sum_{j=0}^{m-1} \langle R_{m-j}, \varphi_j \rangle = \langle R_0, f \rangle, \quad x \in S \cap U, \tag{49}$$

причем вектор R_0 — не нулевой.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 7, переходим в задаче (43) к криволинейным координатам (s, ξ). В этих координатах задача (43) принимает вид (47), где

$$Q\left(s, \xi, i\frac{\partial}{\partial s}, i\frac{\partial}{\partial \xi}\right) = \sum_{=0}^{m} A_j\left(s, \xi, i\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\frac{\partial^{m-j}}{\partial s^{m-j}},$$

и при $s=0$ матричные операторы A_j являются дифференциальными операторами на S порядка не выше j. В частности, коэффициент $A_0 = A_0(s, \xi)$ является матричной функцией. Из формулы (48) следует, что

$$A_0(s, \xi) = i^m P_0(x, \nabla s(x)).$$

Таким образом, положив в (47) $s=0$, получим, что для любой вектор-функции $u \in C^m(\bar{U}_+)$

$$A_0(0, \xi)\frac{\partial^m u}{\partial s^m} + \sum_{j=1}^{m} A_j\left(0, \xi, i\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\varphi_{m-j} = f, \quad x \in S \cap U, \tag{50}$$

где $\det A_0(0, \xi) = i^{md} H(x, \nabla s(x))|_{s=0}$. Значит, $\det A_0(0, \xi) \equiv 0$, поскольку поверхность S характеристична. Обозначим через $R_0(\xi)$ левый нуль-вектор матрицы $A_0(0, \xi)$ и через R_j — произведение $R_0 A_j(0, \xi, i\partial/\partial\xi)$. Умножив равенство (50) слева на $R_0(\xi)$, получим (49). ■

§ 6. Отыскание характеристических поверхностей

Оператор $P(x, i\partial/\partial x)$ (возможно, матричный) называется эллиптическим в точке x, если $H(x, p) \neq 0$ при всех $p \in R^n$, $p \neq 0$. Оператор называется эллиптическим в области, если он эллиптичен в каждой точке области.

Из этого определения, очевидно, следует, что эллиптические операторы не могут иметь характеристических поверхностей. Это понятие — характеристическая поверхность — чаще всего встречается в нестационарных задачах, когда имеются временна́я переменная t и пространственные переменные $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Пусть $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n) \in R^{n+1}$, $q = (q_0, q_1, \ldots, q_n) \in R^{n+1}$ — двойственная переменная, $y' = (y_1, \ldots, y_n)$, $q' = (q_1, \ldots, q_n)$. Если λ и $p = (p_1, \ldots, p_n)$ — переменные, двойственные к t и $x \in R^n$ соответственно, то вектор (t, x) будет обозначаться через y, (λ, p) — через q, так что $y_0 = t$, $y' = x$, $q_0 = \lambda$, $q' = p$. При этом линейные дифференциальные

операторы по переменным $y=(t, x)$ будут записываться в виде $P(y, i\partial/\partial y)$, где $P(y, q)$ — многочлен (характеристический) относительно q.

Все результаты, имеющиеся в § 1, 2, 4 этой главы, были доказаны в случае любой размерности пространства. Значит, эти результаты останутся справедливыми, если в них заменить x на y и p на q. Без каких-либо оговорок мы будем этим в дальнейшем регулярно пользоваться. В частности, уравнение, определяющее характеристические поверхности S для оператора $P(y, i\partial/\partial y)$, примет вид

$$H(y, \nabla s(y))=0, \ y\in S, \tag{51}$$

где S — гиперповерхность в $R^{n+1}{}_y$, задаваемая уравнением $s(y)=0$, $s\in C^\infty(R^{n+1})$, $\operatorname{Im} s\equiv 0$, $\nabla s\neq 0$ на S. Ниже без напоминаний предполагается, что функция $H(y, q)$ — вещественнозначная.

Наиболее типична ситуация, когда ищутся характеристические поверхности S вида $t=u(x)$, $u\in C^\infty(R^n)$ при условии, что известно пересечение S_0 этой поверхности с гиперплоскостью $t=0$. Причина, по которой мы не можем при решении уравнения (51) сослаться на результаты § 2, состоит в том, что это уравнение справедливо не всюду, а только на самой поверхности S. Если же поверхность S имеет вид $t=u(x)$, $u\in C^\infty(\Omega)$, где Ω — область в R^n, то уравнение (51) принимает вид

$$H(u, x, -1, \nabla u)=0, \ x\in\Omega.$$

Теперь из теоремы 4 и замечания 2 к § 2 следует

Теорема 8. *Поверхность S, задаваемая уравнением $t=u(x)$, $u\in C^\infty(\Omega)$, тогда и только тогда является характеристической, когда график Γ_u вектор-функции (u, u'_x) составлен из характеристических полос системы*

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{d\tau}=H'_p(u, x, -1, p),\\ &\frac{du}{d\tau}=\langle p, H'_p(u, x, -1, p)\rangle,\\ &\frac{dp}{d\tau}=-H'_x(u, x, -1, p)-pH'_u(u, x, -1, p).\end{aligned}\right. \tag{52}$$

Заметим, что при этом сама поверхность S состоит из характеристик указанной системы.

Определение. *Оператор $P(y, i\partial/\partial y)$* (возможно, матричный) называется *гиперболическим в точке y* (относительно переменной $y_0=t$), если уравнение $H(y, q)=0$ при всех $q'\in R^n$, $q'\neq 0$ имеет ровно md вещественных различных корней $q_0=q_{0j}(y, q')$, $1\leqslant j\leqslant md$. *Оператор* называется *гиперболическим в области*, если он гиперболичен в каждой точке области.

Напомним, что m — максимальный порядок дифференцирования в матрице P, а $d\times d$ — ее размер. Очевидно, приведенное

определение эквивалентно следующему: *оператор* $P(y, i\partial/\partial y)$ *называется гиперболическим в точке* y (относительно переменной $y_0=t$), если в этой точке направление $(1, 0, \ldots, 0)$ не является характеристическим, и при каждом $q'\in R^n$, $q'\neq 0$ все корни $q_0=q_{0j}$, $j=1, 2, \ldots$, уравнения $H(y, q)=0$ вещественны и различны.

Из гиперболичности оператора P, очевидно, следует, что функция $H(y, q)$ может быть представлена в виде $H(y, q)=$ $=a(y)H_1(y, q)$, где $a(y)\neq 0$, а функция H_1 — вещественнозначная. Умножив одно из уравнений системы $P(y, i\partial/\partial y)u=f$ на $a^{-1}(y)$, приходим к случаю $a(y)\equiv 1$. Таким образом, сделанное выше предположение о вещественнозначности функции H в гиперболическом случае не является каким-либо ограничением на оператор P.

Пусть поверхность $S_0\subset R^n$ записана в параметрическом виде $x=x(\xi)$, $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})\in R^{n-1}$, $x(\xi)\in C^\infty(R^{n-1})$ и ранг матрицы Якоби $\partial x/\partial\xi$ равен $n-1$. Обозначим через $p^0(\xi)\in R^n{}_x$ нормаль к S_0 единичной длины. Направление вектора $p^0(\xi)$ выберем произвольно, но так, чтобы вектор $p^0(\xi)$ непрерывно зависел от ξ. Тогда $p^0(\xi)\in C^\infty(R^{n-1})$.

Рассмотрим уравнение

$$H(0, x(\xi), -1, Cp^0(\xi))=0, \quad \xi\in\bar{V}\subset R^{n-1}, \tag{53}$$

относительно неизвестной функции $C=C(\xi)$. Пусть при каждом $\xi\in\bar{V}$, где V — ограниченная область в R^{n-1}, уравнение (53) имеет M вещественных корней $C=C_j(\xi)$, $1\leqslant j\leqslant M$, и все они простые. Тогда

$$\frac{d}{dC}H(0, x(\xi), -1, Cp^0(\xi))|_{C=C_j(\xi)}\neq 0, \quad \xi\in\bar{V},$$

и к уравнению (53) можно применить теорему о неявной функции. Значит, существует такая окрестность V_ε компакта $\bar{V}$, что при соответствующей нумерации корней $C_j\in C^\infty(V_\varepsilon)$, $1<j<M$. В частности, легко проверить, что условие на корни уравнения (53) выполнено, если оператор $P(y, i\partial/\partial y)$ гиперболичен и $q_{0j}(y, q')\neq 0$ при всех $q'\in R^n$, $q'\neq 0$ и $y\in S'_0$, где S'_0 — компактная часть поверхности S_0, выделяемая условием $\xi\in\bar{V}$. Из теоремы 5′ и замечания 3 к § 2 следует

Теорема 9. *Пусть уравнение* (53) *при каждом* $\xi\in\bar{V}$ *имеет ровно* M *вещественных решений* $C=C_j(\xi)$, $1\leqslant j\leqslant M$, *и все они простые. Тогда в некоторой окрестности* S'_0 *существует ровно* M *характеристических поверхностей* $S=S_j$, $1\leqslant j\leqslant M$, *задаваемых уравнениями* $t=u_j(x)$, $u_j\in C^\infty$, *и совпадающих с* S_0 *при* $t=0$. *При этом графики* Γ_{u_j} *вектор-функций* $(u_j, u_j{}'_x)$ *составлены из характеристических полос системы* (52), *выпущенных из точек* $(x, u, p)|_{\tau=0}=(x(\xi), 0, C_j(\xi)p^0(\xi))$, $1\leqslant j\leqslant M$, $\xi\in V_\varepsilon$.

Сейчас мы дадим еще один способ отыскания характеристических поверхностей. При его обосновании нам понадобится

Лемма 5. *Пусть Ω — ограниченная область в R^{n+1}, $f, s \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $S = \{y : y \in \bar{\Omega},\ s(y) = 0\}$, $\nabla s \neq 0$ при $y \in S$ и $f = 0$ при $y \in S$. Тогда существует такая функция $a \in C^\infty(\bar{\Omega})$, что $f(y) = a(y) s(y)$.*

Доказательство. Утверждение леммы легко проверяется в случае $s(y) \equiv y_0$. В общей ситуации, очевидно, $f/s \in C^\infty(\bar{\Omega} \setminus S)$. Остается заметить, что любая точка $y \in S$ имеет окрестность, в которой существует такая невырожденная бесконечно дифференцируемая замена переменных $y \to \eta = (\eta_0, \dots, \eta_n)$, что $s(y(\eta)) \equiv \eta_0$ в этой окрестности. ■

Пусть, как и выше, поверхность S_0 задана в параметрическом виде $x = x(\xi)$, $\xi \in R^{n-1}$, $\operatorname{rank} \partial x/\partial \xi = n-1$, $p^0(\xi)$ — вектор нормали к S_0 единичной длины и V — ограниченная область в R^{n-1}. Предположим, что вектор $\nu = (1, 0, \dots, 0)$ не является характеристическим в точках

$$S_0' = \{x : x = x(\xi) \in S_0,\ \xi \in \bar{V} \subset R^{n-1}\}, \text{ т. е.}$$

$$H(0, x(\xi), \nu) \neq 0, \ \xi \in \bar{V}, \tag{54}$$

и что уравнение

$$H(0, x(\xi), \lambda, p^0(\xi)) = 0, \ \xi \in \bar{V}, \tag{55}$$

при каждом $\xi \in \bar{V}$ имеет ровно M вещественных корней $\lambda = \lambda_j(\xi)$, $1 \leqslant j \leqslant M$, причем все эти корни — простые. В частности, эти условия выполнены, если оператор $P(y, i\partial/\partial y)$ гиперболичен. При сделанных предположениях корни $\lambda_j(\xi)$ будут определены в некоторой окрестности V_ε компакта $\bar{V}$ и при соответствующей нумерации будут принадлежать $C^\infty(V_\varepsilon)$.

Напишем систему Гамильтона с гамильтонианом $H = H(y, q)$:

$$\frac{dy}{d\tau} = H_q'(y, q), \quad \frac{dq}{d\tau} = -H_y'(y, q). \tag{56}$$

Напомним, что ее фазовые кривые называются бихарактеристиками гамильтониана H (иногда они называются также бихарактеристиками оператора $P(y, i\partial/\partial y)$). Бихарактеристики, вдоль которых $H \equiv 0$, называются нулевыми, а их проекции в R^{n+1}_y — лучами.

Теорема 10. *Пусть выполнено условие* (54) *и уравнение* (55) *при каждом $\xi \in \bar{V}$ имеет ровно M вещественных корней $\lambda = \lambda_j(\xi)$, $1 \leqslant j \leqslant M$, и все эти корни простые. Тогда в некоторой окрестности поверхности S'_0 существует ровно M характеристических поверхностей, совпадающих с S_0 при $t = 0$. Эти поверхности составлены из лучей системы Гамильтона* (56), *отвечающих бихарактеристикам, выпущенным из точек:*

$$(y, q)|_{\tau=0} = (0, x(\xi), \lambda_j(\xi), p^0(\xi)), \ \xi \in V_\varepsilon, \quad 1 \leqslant j \leqslant M. \tag{57}$$

Доказательство. Если дополнительно предположить, что $\lambda_j(\xi) \neq 0$ при $\xi \in \bar{V}$, $1 \leqslant j \leqslant M$, то, во-первых, любая характеристическая поверхность в некоторой окрестности S'_0 будет трансвер-

сальна оси t (ее можно будет записать в виде $t=u(x)$, $u\in C^\infty$), во-вторых, будут выполнены условия теоремы 9. Поэтому утверждение теоремы 10 в этом случае легко можно было бы получить из утверждений теоремы 9. Оставляем это читателю в виде упражнения. В общем случае доказательство несколько более длинное.

Существование. Пусть $s_0=s_0(x)$ — произвольная функция, определенная в некоторой окрестности (в $R^n{}_x$) поверхности S'_0 и такая, что $s_0\in C^\infty$, $\operatorname{Im} s_0\equiv 0$, $\nabla s_0\neq 0$ и $s_0=0$ при $x\in S_0$. Поделив ее на $|\nabla s_0(x)|$, мы можем добиться того, что $|\nabla s_0|=1$ при $s_0=0$. Тогда $\nabla s_0=p^0(\xi)$ при $x=x(\xi)\in S_0$ (если $\nabla s_0=-p^0(\xi)$, функцию s_0 можно заменить на $-s_0$). Решим задачу Коши:

$$H(y,\nabla s(y))=0,\quad s|_{t=0}=s_0(x). \tag{58}$$

Так как уравнение

$$H(0,\ x,\ \lambda,\ \nabla s_0(x))=0,\quad x\in R^n, \tag{59}$$

при $x\in S_0$ совпадает с уравнением (55), то при $x\in S'_0$, а значит, и в некоторой окрестности $U\subset R^n{}_x$ поверхности S'_0 уравнение (59) имеет ровно M и притом простых корней $\lambda=\mu_j(x)$, $1\leqslant j\leqslant M$, совпадающих с $\lambda_j(\xi)$ при $x=x(\xi)\in S_0$. Значит, к задаче (58) применима теорема 6 (см. замечание 1 к теореме 6). Кроме того, поскольку функция $H(y,q)$ однородна по q, то к задаче (58) применимо также замечание 2 к теореме 6. Отсюда следует, что в некоторой области $\omega\subset R^{n+1}$, содержащей S'_0, задача (58) имеет ровно M решений $s=s_j(y)$, $1\leqslant j\leqslant M$, причем функции $s_j(y)$ постоянны вдоль лучей системы (56), отвечающих бихарактеристикам с начальными условиями:

$$(y,q)|_{\tau=0}=(0,\eta,\mu_j(\eta),\nabla s_0(\eta)),\quad \eta\in U\subset R^n, \tag{60}$$

В частности, поверхности $S_j=\{y:s_j(y)=0\}$ составлены из лучей системы (56), отвечающих бихарактеристикам, выпущенным из точек (60) при тех значениях η, для которых $s_j|_{\tau=0}=s_0(\eta)=0$, т. е. при $\eta=\eta(\xi)\in S_0$. Так как при этих η точка (60) принимает вид (57), то построенные поверхности S_j, $1\leqslant j\leqslant M$, имеют структуру, описанную в формулировке теоремы 10. Остается заметить, что эти поверхности характеристические. Действительно, уравнение (58) справедливо всюду в ω и, в частности, в точках S_j. При этом $|\nabla_x s_j(0,x)|=|\nabla s_0(x)|\neq 0$. Значит, $|\nabla_y s_j(y)|\neq 0$ в некоторой окрестности поверхности S'_0.

Единственность. Пусть S — некоторая характеристическая поверхность, проходящая через S_0 и определяемая уравнением $s(y)=0$, где $s\in C^\infty$, $\operatorname{Im} s\equiv 0$, причем $\nabla s(y)\neq 0$ при $y\in S$. Нужно показать, что в некоторой окрестности поверхности S'_0 поверхность S может быть составлена из лучей системы (56), отвечающих бихарактеристикам с начальными данными (57).

Обозначим через Q функцию $Q(y)=H(y,\nabla s(y))$ и через $s_0=s_0(x)$ функцию $s(0,x)$. Поскольку поверхность S — характеристична, то $Q(y)=0$ при $y\in S$, и из леммы 5 следует, что в некото-

рой окрестности поверхности S $a(y) \equiv Q(y)/s(y) \in C^\infty$, т. е. функция $s=s(y)$ в некоторой окрестности поверхности S_0 является решением задачи:

$$H(y, \nabla s(y)) - a(y)s(y) = 0, \quad s|_{t=0} = s_0(x). \tag{61}$$

Так как $H(y, \nabla s(y)) = 0$ при $y \in S$ и выполнено условие (54), то в точках S'_0 векторы $\nabla s(y)$ и ν не пропорциональны, т. е. $\nabla s_0(x) \neq 0$ при $x \in S'_0$. Значит, $\nabla s_0(x(\xi)) = c(\xi)p^0(\xi)$, где $c(\xi) \neq 0$ при $\xi \in V_\varepsilon$, если $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Тогда из условия на корни уравнения (55) и однородности функции $H(y, q)$ по q следует, что уравнение относительно λ

$$H(0, x(\xi), \lambda, \nabla s_0(x(\xi))) = 0 \tag{62}$$

при каждом $\xi \in V_\varepsilon$ имеет ровно M вещественных корней, эти корни простые и равны $c(\xi)\lambda_j(\xi)$, $1 \leqslant j \leqslant M$. Так как уравнение

$$H(0, x, \lambda, \nabla s_0(x)) - a(0, x)s_0(x) = 0, \quad x \in R^n,$$

при $x \in S_0$ совпадает с уравнением (62), то при $x \in U$, где $U \subset R^n{}_x$ — некоторая окрестность поверхности S'_0, оно также имеет M и притом простых корней $\lambda = \mu_j(x)$, $1 \leqslant j \leqslant M$, совпадающих с $c(\xi)\lambda_j(\xi)$ при $x = x(\xi) \in S_0$. Одним из этих корней $\lambda = \mu_{j_0}(x)$ в силу уравнения (61) является функция $s'_t(0, x)$. Теперь из замечания 3 к § 2 следует, что к задаче (61) применима теорема 5′, т. е. задача (61) в некоторой окрестности $\omega \subset R^{n+1}$ поверхности S'_0 имеет ровно M решений, одним из которых является известная с самого начала функция $s=s(y)$. Из этой же теоремы следует, что график функции $s(y)$ составлен из характеристик, являющихся проекциями в $R^{n+2}_{(y,s)}$ решений задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{d\tau} = H'_q(y, q) \\ \dfrac{dq}{d\tau} = -H'_y(y, q) - sa'_y(y) + q\,a(y), \\ \dfrac{ds}{d\tau} = \langle q, H'_q(y, q)\rangle, \end{cases} \qquad \begin{cases} y|_{\tau=0} = (0, \eta), \\ q|_{\tau=0} = \nabla_y s(0, \eta) \\ s|_{\tau=0} = s_0(\eta). \end{cases} \tag{63}$$

Остается показать, что поверхность $S = \{y : s(y) = 0\}$, где функция s находится по решениям задачи (63), можно построить сформулированным в теореме 10 способом из лучей системы (56).

Для этого прежде всего заметим, что последнее уравнение системы (63) может быть записано в виде

$$\frac{ds}{d\tau} = md\,a(y)\,s, \quad s|_{\tau=0} = s_0(\eta). \tag{64}$$

Это вытекает из того, что функция $H(y, q)$ однородна по переменной q порядка md, а $H(y, q) - a(y)s$ является первым интегралом системы (63) (лемма 2) и обращается в нуль в начальных

точках задачи (63). Определив решение $y=y(\tau,\eta)$, $q=q(\tau,\eta)$, $s=s(\tau,\eta)$ задачи (63) и подставив $y=y(\tau,\eta)$ в уравнение (64), получим для s дифференциальное уравнение, для которого справедлива теорема существования и единственности. Значит, вдоль интегральных кривых задачи (63) либо $s\equiv 0$, либо $s\neq 0$ ни в одной точке, причем интегральные кривые задачи (63), вдоль которых $s\equiv 0$, соответствуют параметру $\eta=x(\xi)\in S_0$, а значения (y,q) вдоль этих кривых удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{y}}{d\bar{\tau}} = H'_q(\bar{y},\bar{q}), \\ \dfrac{d\bar{q}}{d\bar{\tau}} = -H'_y(\bar{y},\bar{q}) + \bar{q}a(\bar{y}), \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{y}\big|_{\bar{\tau}=0} = (0,\ x(\xi)), \\ \bar{q}\big|_{\bar{\tau}=0} = \nabla_y s(0,\ x(\xi)), \end{cases} \tag{65}$$

в которых для удобства дальнейших рассуждений изменены обозначения (y,q) на $(\bar{y},\bar{q})$ и τ на $\bar{\tau}$. Остается показать, что лучи задачи (65) совпадают с лучами системы (56), отвечающими бихарактеристикам, выпущенным из точек (57), где $j=j_0$.

Пусть $\bar{y}=\bar{y}(\bar{\tau},\xi)$, $\bar{q}=\bar{q}(\bar{\tau},\xi)$ — решение задачи (65). Найдем функцию $f=f(\bar{\tau},\xi)$ из уравнения

$$f'_{\bar{\tau}} = a(\bar{y}(\bar{\tau},\xi))f, \quad f\big|_{\bar{\tau}=0} = f_0(\xi)\neq 0. \tag{66}$$

Очевидно, $f\neq 0$ при любых $(\bar{\tau},\xi)$. Значит, замена независимой переменной

$$\bar{\tau}\to\tau=\int_0^{\bar{\tau}} f^{md-1}(\alpha,\ \xi)\,d\alpha \tag{67}$$

невырождена. Теперь, воспользовавшись однородностью функции $H(y,q)$ по переменной q, легко проверить, что замена функций $y=\bar{y}$, $q=f^{-1}\bar{q}$ и независимой переменной по формуле (67) переводит решения задачи (65) в решение системы (56) с начальными данными:

$$y\big|_{\tau=0} = (0,\ x(\xi)),\ \ q\big|_{\tau=0} = f_0(\xi)\,\nabla_y s(0,\ x(\xi)). \tag{68}$$

Как уже отмечалось выше,

$$\nabla_y s(0,\ x(\xi)) = (\mu_{j_0}(x(\xi)),\ \nabla_x s_0(x(\xi))) = c(\xi)\,(\lambda_{j_0}(\xi),\ p^0(\xi)). \tag{69}$$

Значит, если $f_0(\xi)\equiv[c(\xi)]^{-1}$, то при указанной замене решения задачи (65) перейдут в решения задачи (56), (57). Так как проекции в R_y^{n+1} решений этих задач одинаковы, то лучи задачи (65) совпадают с соответствующими лучами системы (56), (57). ■

Теорема 11. *Пусть выполнены условия теоремы* 10 *и* $s(y)=0$ — *уравнение одной из указанных в теореме* 10 *характеристических поверхностей, причем* $s\in C^\infty$, $\operatorname{Im} s\equiv 0$, $\nabla s\neq 0$ *при* $y\in S$. *Пусть* $y=y(\tau,\xi)$, $q=q(\tau,\xi)$ — *семейство бихарактеристик систе-*

мы (56), *выпущенных из точек*

$$(y, q)|_{\tau=0} = (0, x(\xi), \nabla_y s(0, x(\xi))), \; \xi \in V_\varepsilon, \; x(\xi) \in S_0. \tag{70}$$

Тогда лучи $y=y(\tau, \xi)$ *этого семейства образуют поверхность* S *и в точках* $y=y(\tau, \xi)\in S$ *векторы* $\nabla s(y)$ *и* q *связаны соотношением* $\nabla s(y)=Fq$, *где* $F=F(\tau, \xi)\neq 0$. *Функция* F *определяется формулами*

$$F = \exp\left[\int_0^\tau \delta(y(\tau, \xi)) \; d\tau\right], \; md = 1, \tag{71}$$

$$F = \left[1 + (md-1)\int_0^\tau \delta(y(\tau, \xi))\, d\tau\right]^{1/(md-1)}, \quad md > 1, \tag{72}$$

где md — *порядок однородности функции* $H(y, q)$ *по переменной* q *и*

$$\delta(y) = |\nabla_y s|^{-2} \langle \nabla_y s, \; \nabla_y [H(y, \nabla s(y))]\rangle.$$

Доказательство. При доказательстве утверждения о единственности в теореме 10 было показано, что поверхность S составлена из лучей задачи (56), (68), где функция $f_0(\xi)\neq 0$ — произвольна. Положив $f_0(\xi)\equiv 1$, получим, что S составлена из лучей (56), (70). Там же было доказано, что функция s является решением задачи (61) и может быть найдена с помощью системы (63). При этом $\nabla s=q$, где q определяется из той же системы (см. теорему 5′). Далее было показано, что на поверхности S компоненты (y, q) решения задачи (63) являются решениями задачи (65), т. е. на поверхности S справедливо равенство $\nabla s(\bar y)=\bar q$, где $(\bar y, \bar q)$ — решение задачи (65). Наконец, было показано, что решения задачи (65) в точке $\bar\tau$ связаны с решениями задачи (56), (68) в точке τ соотношениями $y=\bar y$, $q=f^{-1}\bar q$, где функция $f=f(\bar\tau, \xi)$ определена в (66), а τ дается формулой (67). Значит, при $y\in S$ справедливо равенство $\nabla s(y)=fq$. Положим $f_0(\xi)\equiv 1$. Так как при этом условия (68) и (70) совпадают, то получаем, что $\nabla s(y)=Fq$, где $y\in S$, (y, q) — решение задачи (56), (70), а F — это функция f, выраженная в переменных (τ, ξ). Остается показать, что эта функция дается формулами (71), (72).

Для этого заметим, что из (67) следует, что $d\tau/d\bar\tau=f^{md-1}$ и, значит, задачу (66) можно переписать в виде $F'_\tau F^{md-2}=a$, $F|_{\tau=0}=1$. Получаем формулы (71), (72), в которых вместо $\delta(y)$ стоит функция $a(y)$. Остается добавить, что из уравнения (61) следует, что $a|_{y\in S} = \delta(y)|_{y\in S}$. ∎

Глава IV

РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАЗРЫВОВ. ЗАДАЧИ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

Первый параграф этой главы содержит простые, но существенно используемые в дальнейшем вспомогательные утверждения. Второй параграф (задачи с быстро осциллирующими начальными данными) и третий параграф (распространение разрывов) идейно очень тесно связаны между собой, но читать их можно, в основном, независимо. Материал этой главы существенно опирается на результаты гл. III.

Ниже приняты следующие обозначения: $y=(y_0, y_1, \dots, y_n)\in R^{n+1}$, $q=(q_0, q_1, \dots, q_n)\in R^{n+1}$ — двойственная переменная, $y'=(y_1, \dots, y_n)$, $q'=(q_1, \dots, q_n)$, $P(y, q)$ — многочлен порядка m по переменной q, коэффициенты которого являются бесконечно дифференцируемыми функциями y, $P(y, i\partial/\partial y)$ — линейный дифференциальный оператор с характеристическим многочленом $P(y, q)$. Если $x=(x_1, \dots, x_n)\in R^n$ — пространственные переменные, $t\in R^1$ — временна́я, λ и $p=(p_1, \dots, p_n)$ — переменные, двойственные к t и x соответственно, то вектор (t, x) будет обозначаться через y, (λ, p) — через q, так что $y_0=t$, $y'=x$, $q_0=\lambda$, $q'=p$.

Запишем многочлен $P(y, q)$ в виде $P(y, q)=\sum\limits_{j=0}^{m} P_j(y, q)$, где P_j — однородные многочлены (по переменной q) порядка $m-j$. Старшую однородную часть P_0 многочлена P будем обозначать через $H(y, q)$. Если оператор $P(y, i\partial/\partial y; k)$ полиномиально зависит от параметра k, так что $P(y, q; k)$ — многочлен порядка m по переменным (q, k), то через $P_j(y, q; k)$ обозначается сумма одночленов многочлена P порядка (по переменным (q, k)) ровно $m-j$ и через $H(y, q)$ — многочлен $P_0(y, q; 1)$. Если $P(y, i\partial/\partial y; k)$ — матрица из дифференциальных операторов, то все обозначения остаются прежними, только теперь $H(y, q)=\det P_0(y, q; 1)$.

Нигде не повторяя этого больше, мы будем всюду в этой главе предполагать, что функция H вещественнозначная.

§ 1. Формула Лейбница

Пусть $\alpha=(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс с целочисленными неотрицательными компонентами, $|\alpha|=\Sigma\alpha_i$. Через D^α, ∂^α_q обозначим операторы:

$$D^{\alpha}=i^{|\alpha|}\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y_0^{\alpha_0}\partial y_1^{\alpha_1}\dots\partial y_n^{\alpha_n}},\quad \partial_q^{\alpha}=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial q_0^{\alpha_0}\partial q_1^{\alpha_1}\dots\partial q_n^{\alpha_n}}. \tag{1}$$

Пусть $P(y, i\partial/\partial y)$ — дифференциальный оператор порядка m с характеристическим многочленом $P(y,q)$. Через $P^{(\alpha)}(y, i\partial/\partial y)$ обозначим дифференциальный оператор с характеристическим многочленом $\partial^{\alpha}{}_q P(y,q)$, а через $\nabla_q P(y, i\partial/\partial y)$ — вектор из дифференциальных операторов, характеристическими многочленами которых являются компоненты вектора $\nabla_q P(y,q)$. Пусть $\alpha!=\alpha_0!\alpha_1!\dots\alpha_n!$

Лемма 1. (Формула Лейбница). *Для любых двух функций* $u, v\in C^{\infty}(R^{n+1})$

$$P\left(y, i\frac{\partial}{\partial y}\right)[u(y)v(y)]=$$

$$=\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\frac{1}{\alpha!}[D^{\alpha}u(y)]\left[P^{(\alpha)}\left(y, i\frac{\partial}{\partial y}\right)v(y)\right]. \tag{2}$$

Следствие. Для тех же функций u, v

$$P\left(y, i\frac{\partial}{\partial y}\right)[u(y)v(y)]=u(y)P_0\left(y, i\frac{\partial}{\partial y}\right)v(y)+$$

$$+u(y)P_1\left(y, i\frac{\partial}{\partial y}\right)v(y)+i\left\langle\nabla u(y), \nabla_q P_0\left(y, i\frac{\partial}{\partial y}\right)v(y)\right\rangle+\dots, \tag{3}$$

где многоточием обозначены слагаемые, в которых функция v дифференцируется не более $m-2$ раз.

Доказательство. Легко проверяется, что при $P=\partial^{\alpha_i}/\partial y_i^{\alpha_i}$ формула (2) совпадает с обычной формулой Лейбница для производной (порядка α_i) от произведения двух функций одной переменной. Исходя из этого можно получить формулу (2) и в общей ситуации. Но, возможно, несколько проще следующее рассуждение. Получим сначала формулу (2) в случае, когда $P=P(i\partial/\partial y)$ — однородный дифференциальный оператор порядка d с постоянными коэффициентами. Функции u, v, очевидно, можно считать принадлежащими пространству $C^{\infty}{}_0(R^n)$. Тогда если $F_{y\to q}$ — оператор преобразования Фурье, то

$$F_{y\to q}\left[P\left(i\frac{\partial}{\partial y}\right)(uv)\right]=P(q)\int_{R^n}\tilde{u}(q-\xi)\tilde{v}(\xi)\,d\xi,$$

где $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ — преобразования Фурье функций u, v. Разложив функцию $P(q)$ в точке $q=\xi$ в ряд Тейлора, получим

$$P(q)=\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant d}\frac{1}{\alpha!}P^{(\alpha)}(\xi)(q-\xi)^{\alpha},\quad q^{\alpha}=q_0^{\alpha_0}q_1^{\alpha_1}\dots q_n^{\alpha_n}.$$

Значит,

$$F_{y\to q}\left[P\left(i\frac{\partial}{\partial y}\right)(uv)\right]=$$

$$= \sum_{0 \leq |\alpha| \leq d} \int_{R^n} \frac{1}{\alpha!} [(q-\xi)^\alpha \widetilde{u}(q-\xi)] [P^{(\alpha)}(\xi) \widetilde{v}(\xi)] \, d\xi =$$

$$= \sum_{0 \leq |\alpha| \leq d} \frac{1}{\alpha!} \left[\widetilde{D^\alpha u} * \widetilde{P^{(\alpha)}\left(i \frac{\partial}{\partial y}\right) v} \right],$$

где $*$ означает знак свертки двух функций. Взяв обратное преобразование Фурье, получаем формулу (2) для оператора $P(i\partial/\partial y)$. В частности, она справедлива для оператора D^α. Но тогда, в силу линейности этой формулы по P, она справедлива для любого оператора $P(y, i\partial/\partial y)$. Формула (3) вытекает из формулы (2). ■

Лемма 2. *Пусть $Q(y, i\partial/\partial y)$ — линейный однородный оператор порядка d, $\chi=\chi(t)$ и $S=S(y)$ — функции одной и $(n+1)$ переменных соответственно. Тогда*

$$Q\left(y, i\frac{\partial}{\partial y}\right) \chi(S(y)) = \sum_{k=0}^{d} \psi_k(y) \chi^{(d-k)}(S(y)),$$

где $\psi_k(y)$ — полиномы от функции S и ее производных, коэффициенты которых являются линейными комбинациями коэффициентов оператора Q. При этом

$$\psi_0(y) = Q\left(y, i\frac{\partial S}{\partial y}\right), \quad \psi_1(y) = \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha S(y)\, Q^{(\alpha)}\left(y, i\frac{\partial S}{\partial y}\right).$$

Доказательство. Пусть сначала $Q=Q(i\partial/\partial y)$ — оператор с постоянными коэффициентами. Так как функция $Q(q)$ однородна, то $Q(q) = \frac{1}{d}\sum_{j=0}^{n} q_j Q'_{q_j}(q)$ и, значит,

$$Q\left(i\frac{\partial}{\partial y}\right) \chi(S(y)) = \frac{i}{d}\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j}\left[Q'_{q_j}\left(i\frac{\partial}{\partial y}\right) \chi(S(y))\right].$$

Будем доказывать утверждение леммы индукцией по d. При $d=1$ оно очевидно. Предположим, что лемма 2 справедлива для операторов порядка $d-1$, и докажем ее для оператора Q порядка d. В силу предположения индукции лемму можно применить к операторам $Q'_{q_j}(i\partial/\partial y)$. Значит,

$$Q\left(i\frac{\partial}{\partial y}\right) \chi(S(y)) = \frac{i}{d}\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j}\left[Q'_{q_j}\left(i\frac{\partial S}{\partial y}\right) \chi^{(d-1)}(S(y)) + \right.$$

$$\left. + \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha S(y)\, Q'^{(\alpha)}_{q_j}\left(i\frac{\partial S}{\partial y}\right) \chi^{(d-2)}(S(y)) + \ldots\right], \qquad (4)$$

где многоточием обозначены слагаемые, содержащие производные от χ порядка не выше $d-3$. Очевидно,

$$i\frac{\partial}{\partial y_j}Q'_{q_j}\left(i\frac{\partial S}{\partial y}\right)=-\sum_{k=0}^{n}Q''_{q_jq_k}\left(i\frac{\partial S}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 S}{\partial y_j\partial y_k},\quad Q'^{(\alpha)}_{q_j}=[Q^{(\alpha)}]'_{q_j}.$$

Поэтому из формулы (4) следует, что

$$Q\left(i\frac{\partial}{\partial y}\right)\chi(S(y))=\frac{i}{d}\sum_{j=0}^{n}Q'_{q_j}\left(i\frac{\partial S}{\partial y}\right)\frac{\partial S}{\partial y_j}\chi^{(d)}(S(y))+$$

$$+\frac{1}{d}\sum_{|\alpha|=2}\frac{2}{\alpha!}Q^{(\alpha)}\left(i\frac{\partial S}{\partial y}\right)D^{\alpha}S(y)\chi^{(d-1)}(S(y))+$$

$$+\frac{i}{d}\sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}\sum_{j=0}^{n}D^{\alpha}S(y)\left[Q^{(\alpha)'}_{q_j}\left(i\frac{\partial S}{\partial y}\right)\right]\frac{\partial S}{\partial y_j}\chi^{(d-1)}(S(y))+\ldots,\tag{5}$$

где многоточием обозначены слагаемые, содержащие производные от χ порядка не выше $d-2$. Остается еще раз воспользоваться однородностью функции $Q(q)$, откуда

$$i\sum_{j=0}^{n}Q'_{q_j}\left(i\frac{\partial S}{\partial y}\right)\frac{\partial S}{\partial y_j}=d\cdot Q\left(i\frac{\partial S}{\partial y}\right),$$

$$i\sum_{j=0}^{n}\left[Q^{(\alpha)'}_{q_j}\left(i\frac{\partial S}{\partial y}\right)\right]\frac{\partial S}{\partial y_j}=(d-2)\,Q^{(\alpha)}\left(i\frac{\partial S}{\partial y}\right).$$

Это вместе с формулой (5) доказывает справедливость утверждения леммы 2 для операторов Q с постоянными коэффициентами. В частности, она справедлива для оператора D^{α}. Поэтому из соображений линейности следует, что она справедлива для любого оператора $Q=Q(y, i\partial/\partial y)$. ■

Из лемм 1, 2, очевидно, вытекает

Лемма 3. *Пусть $\chi=\chi(t)$ — функция одной переменной, $\varphi, S\in C^{\infty}(R^{n+1})$, $P(y, i\partial/\partial y)$ — линейный дифференциальный оператор порядка m с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами. Тогда*

$$P\left(y,\ i\frac{\partial}{\partial y}\right)[\varphi(y)\chi(S(y))]=$$

$$=\sum_{j=0}^{m}\left[Q_j\left(y,\ i\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi(y)\right]i^{m-j}\chi^{(m-j)}(S(y)),\tag{6}$$

где Q_j — линейные дифференциальные операторы порядка не выше j с коэффициентами из класса $C^\infty(R^{n+1})$, зависящими только от оператора P и функции S. В частности,

$$Q_0\varphi = P_0(y, \nabla S)\varphi, \tag{7}$$

$$Q_1\varphi = i\langle \nabla_q P_0(y, \nabla S), \nabla\varphi\rangle -$$
$$- i\Big[\sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha S(y) P_0^{(\alpha)}(y, \nabla S) + iP_1(y, \nabla S)\Big]\varphi. \tag{8}$$

Частным случаем этого утверждения является

Лемма 4. *Пусть φ, S и P — те же, что и в лемме 3. Тогда*

$$P\left(y, i\frac{\partial}{\partial y}\right)[\varphi(y)e^{-ikS(y)}] =$$
$$= e^{-ikS(y)} \sum_{j=0}^{m} \left[Q_j\left(y, i\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi\right] k^{m-j},$$

где операторы Q_j определены в лемме 3.

Пусть $P(y, q; k)$ — многочлен порядка m по переменным (q, k) с зависящими от y коэффициентами класса $C^\infty(R^{n+1})$ и $P(y, i\partial/\partial y; k)$ — линейный дифференциальный оператор, полиномиально зависящий от параметра k, характеристический многочлен которого равен $P(y, q; k)$. Напомним, что через $P_j(y, q; k)$ обозначается сумма одночленов многочлена $P(y, q; k)$ порядка (по переменным q, k) ровно $m-j$. Применим лемму 4 к каждому одночленному слагаемому оператора P. Сложим полученные результаты, собрав в правой части вместе члены одного порядка по k. Получим следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть $\varphi, S \in C^\infty(R^{n+1})$, тогда*

$$P\left(y, i\frac{\partial}{\partial y}; k\right)[\varphi(y)e^{-ikS(y)}] =$$
$$= e^{-ikS(y)} \sum_{j=0}^{m} \left[Q_j\left(y, i\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi\right] k^{m-j},$$

где Q_j — линейные дифференциальные операторы порядка не выше j с коэффициентами из $C^\infty(R^{n+1})$, зависящими только от оператора P и функции S. В частности, операторы Q_0, Q_1 даются формулами (7), (8), *в которых* $P_0(y, q) = P_0(y, q; 1)$, $P_1(y, q) = P_1(y, q; 1)$.

Если $P(y, i\partial/\partial y)$ — матрица из дифференциальных операторов, то через $P^{(\alpha)}(y, i\partial/\partial y)$ обозначим оператор, характеристическая матрица которого получается в результате применения оператора ∂^α_q к каждому элементу матрицы $P(y, q)$. Очевидна следующая

Лемма 6. *Утверждения лемм 3—5 без каких-либо изменений остаются справедливыми, если P — матричный оператор и φ — вектор-функция.*

§ 2. Задачи с быстро осциллирующими начальными данными

Пусть $x=(x_1, \ldots, x_n)\in R^n$, $t\in R^1$, $y=(y_0, y_1, \ldots, y_n)=(t, x)$, $q=(q_0, q_1, \ldots, q_n)$, $k\in R^1$, $P(y, q; k)$ — многочлен порядка m по переменным (q, k) с зависящими от y коэффициентами класса $C^\infty(R^{n+1})$, $P(t, x, i\partial/\partial t, i\partial/\partial x; k)=P(y, i\partial/\partial y; k)$ — линейный дифференциальный оператор, полиномиально зависящий от параметра k, и функция $H(y, q)=P_0(y, q; 1)$ — вещественнозначная.

Будем искать формальное асимптотическое решение уравнения

$$P\left(y,\, i\frac{\partial}{\partial y};\, k\right)u=0 \tag{9}$$

в виде

$$u\sim e^{-ikS(y)}\sum_{j=0}^{\infty} a_j(y)\,k^{-j},\ \operatorname{Im}S\equiv 0, \tag{10}$$

где $S, a_j\in C^\infty(R^{n+1})$. Формальный (не обязательно сходящийся) ряд (10) называется *формальным асимптотическим решением* уравнения (9), если первые N слагаемых этого ряда удовлетворяют уравнению (9) с точностью до $O(k^{-N_1})$, $k\to\infty$, где $N_1\to\infty$ при $N\to\infty$. Сначала будем искать решения, принимающие заданные значения при $t=0$:

$$u|_{t=0}=e^{-ikS_0(x)}\sum_{j=0}^{\infty} a_{j0}(x)\,k^{-j},\quad \operatorname{Im}S_0\equiv 0. \tag{11}$$

Другие задачи будут обсуждаться во второй части этого параграфа.

Подставив функцию (10) в уравнение (9) и собрав вместе члены одного порядка по k, получим ряд, аналогичный (10), в котором только суммирование начинается не с нулевой степени k, а с k^m:

$$Pu\sim e^{-ikS(y)}\sum_{j=0}^{\infty} b_j(y)\,k^{m-j}. \tag{12}$$

Очевидно, $b_0(y)=H(y, \nabla S)a_0(y)$, где $H(y, q)\equiv P_0(y, q; 1)$, а остальные коэффициенты b_j выражаются через функции S, a_l (см. лемму 5). Приравнивая коэффициенты b_j нулю, получаем соотношения для S и a_l, которые должны выполняться для того, чтобы ряд (10) был формальным асимптотическим решением уравнения (9). В частности, если $a_0(y)\neq 0$, то, приравняв нулю коэффициент $b_0(y)$, получим, что функция $S=S(y)$ должна быть решением задачи

$$H(y, \nabla S)=0,\ S(0, x)=S_0(x). \tag{13}$$

Примеры. 1. Если уравнение (9) — это уравнение Шредингера:

$$ik\partial u/\partial t - a^2(x)\Delta u = 0,$$

то $H = \lambda + a^2(x)|p|^2$.

2. Если уравнение (9) имеет вид

$$-c^2(x)\Delta u - k^2 u = 0, \tag{14}$$

то $H = c^2(x)|p|^2 - 1$. Так как уравнение (14) не зависит от t, то его формальное асимптотическое решение ищется в виде (10), где все функции S и a_j зависят только от x. Начальные данные (11) в этом случае будут задаваться на гиперплоскости $x_1 = \text{const}$. Другие постановки, как уже говорилось, будут обсуждаться во второй части этого параграфа.

3. Если $P = P(y, i\partial/\partial y)$ — оператор, не зависящий от k, то функция H является старшей однородной частью характеристического многочлена $P(y, q)$.

Прежде чем строить формальные асимптотические решения уравнения (9), напомним, как решается задача Коши (13). Предположим, что при всех $\eta \in R^n$ уравнение

$$H(0, \eta, \lambda, \nabla S_0(\eta)) = 0 \tag{15}$$

относительно λ имеет ровно M вещественных корней $\lambda = \lambda_\nu(\eta)$, $1 \leqslant \nu \leqslant M$, причем все эти корни простые. В частности, это требование выполнено в приведенном выше примере 1 для любой $S_0 \in C^\infty(R^n)$ и в примере 3, если оператор P гиперболичен, $S_0 \in C^\infty(R^n)$ и $\nabla S_0 \neq 0$. Каждому корню $\lambda = \lambda_\nu(\eta)$ соответствует семейство бихарактеристик $y = y^\nu(\tau, \eta)$, $q = q^\nu(\tau, \eta)$ системы

$$y'_\tau = H'_q(y, q), \quad q'_\tau = -H'_y(y, q), \tag{16}$$

отвечающих начальным данным

$$(y, q)|_{\tau=0} = (0, \eta, \lambda_\nu(\eta), \nabla S_0(\eta)), \tag{17}$$

и семейство выпущенных из гиперплоскости $t=0$ лучей $y = y^\nu(\tau, \eta)$, которые являются проекциями в R_y^{n+1} указанных бихарактеристик. *Координаты* (τ, η) *называются лучевыми.* Из теоремы 6 гл. 3 и замечания 1 к ней следует

Теорема 1. *Пусть уравнение* (15) *при всех* $\eta \in R^n$ *имеет ровно M вещественных корней* $\lambda = \lambda_\nu(\eta)$, $1 \leqslant \nu \leqslant M$, *и все эти корни простые. Тогда существует такая окрестность* $\omega \subset R_y^{n+1}$ *гиперплоскости* $t=0$, *через каждую точку которой проходит ровно один луч* $y = y^\nu(\tau, \eta)$ *каждого семейства и* $D(y^\nu(\tau, \eta))/D(\tau, \eta) \neq 0$ *при* $y \in \omega$. *Пусть* $t=0$, $x = \eta^\nu$ — *точка, из которой этот луч выходит,* l^ν_y — *отрезок луча, заключенный между точками* $(0, \eta^\nu)$ *и* y, L^ν_y — *соответствующий отрезок бихарактеристики.*

В области ω задача (13) *имеет ровно M решений $S=S^{\nu}(y)$. Эти решения равны*

$$S^{\nu}(y)=S_0(\eta^{\nu})+\int\limits_{L_y^{\nu}}\langle q,\,dy\rangle,\quad 1\leqslant\nu\leqslant M,\tag{18}$$

причем $\nabla S^{\nu}(y)=q$, где $(y,q)\in L^{\nu}{}_y$.

Теперь можно получить для уравнения (9) формальные асимптотические решения вида (10). Для каждого натурального N обозначим через g_j функцию

$$g_j=i\sum_{l=0}^{j-1}{}' Q_{j+1-l}\left(y,\,i\frac{\partial}{\partial y}\right)a_l(y),\ j>0,\tag{19}$$

где операторы Q_l определены в лемме 5, а штрих у знака суммы означает, что в ней надо отбросить слагаемые, для которых $l>N$ или $j+1-l>m$. Пусть $h(y)$ — функция, стоящая в квадратных скобках в правой части формулы (8), где P_0 и P_1 определены в лемме 5.

Теорема 2. *Пусть $S_0\in C^{\infty}(R^n)$, $\operatorname{Im}S_0\equiv 0$ и выполнено условие теоремы* 1. *Тогда для любого N и набора функций $a_{j0}(x)\in\in C^{\infty}(R^n)$ в окрестности $\omega\subset R^{n+1}$ гиперплоскости $t=0$ существует M функций u вида*

$$u=e^{-ikS(y)}\sum_{j=0}^{N}a_j(y)\,k^{-j},\ S,a_j\in C^{\infty}(\omega),\ \operatorname{Im}S\equiv 0,\tag{20}$$

удовлетворяющих уравнению

$$Pu=f(y,k),\quad f=O(k^{-N+m-2}),\quad k\to\infty,\tag{21}$$

где

$$f=e^{-ikS(y)}\sum_{j=N+2}^{N+m}b_j(y)\,k^{m-j},\quad b_j\in C^{\infty}(\omega),\tag{22}$$

и начальным условиям

$$S(0,x)=S_0(x),\ a_j(0,x)=a_{j0}(x),\ 0\leqslant j\leqslant N.\tag{23}$$

При этом функция S является одним из построенных в теореме 1 решений задачи (13). *После выбора функции S и соответствующего ей семейства лучей $y=y^{\nu}(\tau,\eta)$ задачи* (16), (17) *функции a_j определяются однозначно по начальным условиям и рекуррентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнений переноса), выполняющихся на указанной системе лучей. Эти уравнения имеют вид*

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\tau}a_0-h(y^{\nu}(\tau,\eta))\,a_0=0,\\ \frac{d}{d\tau}a_j-h(y^{\nu}(\tau,\eta))\,a_j=g_j(y^{\nu}(\tau,\eta)),\quad j>0,\end{gathered}\tag{24}$$

где (τ, η) — *лучевые координаты, соответствующие выбранному семейству лучей.*

Доказательство. Как уже отмечалось выше, подставив выражение (20) в уравнение (9), получим, что

$$Pu = e^{-ikS(y)} \sum_{j=0}^{N+m} b_j(y) k^{m-j}. \tag{25}$$

Коэффициенты b_j могут быть найдены с помощью леммы 5. Из нее следует, что

$$\begin{cases} b_0 = Q_0(y) a_0, \\ b_1 = Q_0(y) a_1 + Q_1\left(y, i\dfrac{\partial}{\partial y}\right) a_0, \\ b_2 = Q_0(y) a_2 + Q_1\left(y, i\dfrac{\partial}{\partial y}\right) a_1 + Q_2\left(y, i\dfrac{\partial}{\partial y}\right) a_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{j+1} = Q_0(y) a_{j+1} + Q_1\left(y, i\dfrac{\partial}{\partial y}\right) a_j + \sum\limits_{l=0}^{j-1}{}' Q_{j+1-l}\left(y, i\dfrac{\partial}{\partial y}\right) a_l, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases} \tag{26}$$

где

$$Q_0(y) = P_0(y, \nabla S; 1).$$

Пусть функция S является решением задачи (13). Тогда первые слагаемые в правых частях формул (26) обращаются в нуль в ω (в частности, $b_0 \equiv 0$). Положив $b_{j+1} = 0$, $0 \leqslant j \leqslant N$, и воспользовавшись явным видом оператора Q_1, приведенным в лемме 5, получим для коэффициентов a_j уравнения

$$\langle \nabla a_j, \nabla_q H(y, \nabla S)\rangle - h(y) a_j = \begin{cases} 0, & j = 0, \\ g_j(y), & 1 \leqslant j \leqslant N. \end{cases} \tag{27}$$

Формула (25) при этом приобретает вид (21), (22). Очевидно, система (24) имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям (23). Таким образом, для доказательства теоремы 2 остается показать, что системы уравнений (27) и (24) совпадают. Но из теоремы 1 следует, что $\nabla S(y) = q$, где (y, q) принадлежит тому семейству бихарактеристик задачи (16), (17), которое соответствует выбранной функции S. Теперь из первой половины системы (16) получаем, что

$$\nabla_q H(y, \nabla S) = \nabla_q H(y, q) = y'_\tau$$

и, значит,

$$\langle \nabla a_j, \nabla_q H(y, \nabla S)\rangle = \frac{d}{d\tau} a_j,$$

откуда следует совпадение систем (27) и (24). ■

С помощью построенных в теореме 2 формальных асимптотических решений уравнения (9) можно построить для этого уравнения формальное асимптотическое решение начальной задачи с быстро осциллирующими начальными данными. Будем искать при $t>0$ решение задачи

$$\begin{cases} P\left(y,\, i\dfrac{\partial}{\partial y};\, k\right) u = 0, \\ \dfrac{\partial^j u}{\partial t^j}(0, x) = k^j e^{-ikS_0(x)} \displaystyle\sum_{l=0}^{N} c_{lj}(x) k^{-l}, \quad 0 \leqslant j \leqslant M-1, \end{cases} \tag{28}$$

где $S_0, c_{lj} \in C^\infty(R^n)$, $\operatorname{Im} S_0 \equiv 0$ и уравнение (15) при всех $\eta \in R^n$ имеет ровно M вещественных корней $\lambda = \lambda_\nu(\eta)$, $1 \leqslant \nu \leqslant M$, причем все эти корни простые. Обозначим через u_ν построенные в теореме 2 формальные асимптотические решения уравнения (9) вида

$$u_\nu = e^{-ikS^\nu(y)} \sum_{l=0}^{N} a_l^\nu(y)\, k^{-l}, \quad \operatorname{Im} S^\nu \equiv 0, \tag{29}$$

где функция S^ν дается формулой (18), а коэффициенты a^ν_l удовлетворяют уравнениям переноса (24) и начальным условиям

$$a_l^\nu(0, x) = a_{l0}^\nu(x). \tag{30}$$

Теорема 3. *Пусть выполнено условие теоремы* 1. *Тогда существуют такие функции* $a_{l0}^\nu \in C^\infty(R^n)$, *что в области* ω, *определенной в теореме* 1, *функция* $u = \sum_{\nu=1}^{M} u_\nu$ *будет при* $k \to \infty$ *решением задачи*

$$P\left(y,\, i\frac{\partial}{\partial y};\, k\right) u = O(k^{-N+m-2}), \quad y \in \omega, \tag{31}$$

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j}(0, x) = k^j e^{-ikS_0(x)} \sum_{l=0}^{N} c_{lj}(x)\, k^{-l} + O(k^{-N-1+j}), \quad 0 \leqslant j \leqslant M-1. \tag{32}$$

При этом «невязки» в правой части задачи (31), (32) *соответственно равны*

$$O(k^{-N+m-2}) = \sum_{\nu=1}^{M} e^{-ikS^\nu(y)} \sum_{l=N+2}^{N+m} b_l^\nu(y)\, k^{m-l}, \tag{33}$$

$$O(k^{-N-1+j}) = e^{-ikS_0(x)} \sum_{l=N+1}^{N+j} d_{lj}(x)\, k^{j-l}, \tag{34}$$

где $b^\nu_j \in C^\infty(\omega)$, $d_{lj} \in C^\infty(R^n)$.

Доказательство. В силу теоремы 2 при любом выборе начальных данных (30) функция u удовлетворяет уравнению (31) с правой частью (33). Таким образом, нужно заботиться только о выполнении условий (32), (34). Вычислим $\partial^j u_\nu/\partial t^j$. Для этого заметим, что если при последовательном дифференцировании функции (29) дифференцировать только экспоненту, то функция u_ν умножится на $[-ik\partial S^\nu/\partial t]^j$. Если же хотя бы один раз продифференцировать предэкспоненту, то возникающие дополнительно степени k будут меньше j. Таким образом,

$$\frac{\partial^j u_\nu}{\partial t^j} = e^{-ikS^\nu}\left\{\left(-ik\frac{\partial S^\nu}{\partial t}\right)^j \sum_{l=0}^{N} a_l^\nu k^{-l} + k^j \sum_{l=0}^{N+j} A_{lj}^\nu k^{-l}\right\}, \quad (35)$$

где $A_{lj}^\nu \equiv 0$ при $l=0$ и $A_{lj}^\nu = A_{lj}^\nu(y)$, $l>0$, — некоторые бесконечно дифференцируемые функции, зависящие только от функций S^ν и $a^\nu{}_p$, $0 \leqslant p \leqslant l-1$ и их производных. Более строгое обоснование формулы (35) следует из леммы 4.

Из (35) будет следовать справедливость условий (32), (34), если вектор $(a^1{}_{l0}, a^2{}_{l0}, \ldots, a^M{}_{l0})$ при каждом фиксированном $l=0, 1, \ldots, N$ будет решением системы

$$\sum_{\nu=1}^{M}\left[-i\frac{\partial S^\nu(0,x)}{\partial t}\right]^j a_{l0}^\nu(x) = c_{lj}(x) - \sum_{\nu=1}^{M} A_{lj}^\nu(0,x), \quad 0 \leqslant j \leqslant M-1. \tag{36}$$

В силу теоремы 1 $\nabla S^\nu = q$, где $(y,q) \in L^\nu{}_y$. В частности, $(y, \nabla S^\nu)$ при $y=(0,x)$ совпадает с правой частью равенства (17) при $\eta = x$. Значит, $\partial S^\nu(0,x)/\partial t = \lambda_\nu(x)$. Таким образом, система (36) может быть переписана в виде

$$\sum_{\nu=1}^{M}[\lambda_\nu(x)]^j a_{l0}^\nu(x) = (i)^j\left[c_{lj}(x) - \sum_{\nu=1}^{M} A_{lj}^\nu(0,x)\right], \quad 0 \leqslant j \leqslant M-1. \quad (37)$$

Определителем $D(x)$ этой системы является определитель Вандермонда функций $\lambda_\nu(x)$, $1 \leqslant \nu \leqslant M$. А так как корни λ_ν уравнения (15) — простые, то $\lambda_{\nu_1}(x) \neq \lambda_{\nu_2}(x)$ при $\nu_1 \neq \nu_2$ и, значит, $D(x) \neq 0$ при $x \in R^n$. Таким образом, система (37) однозначно разрешима при любых правых частях. Положим сначала $l=0$. Тогда $A^\nu{}_{0j} \equiv 0$. Находим из системы (37) функции $a^\nu{}_{00}(x)$. Затем из уравнений переноса (24) и начальных условий (30) определяем $a^\nu{}_0(y)$. Зная эти функции, находим $A^\nu{}_{1j}(y)$. Теперь можно решить систему (37) с $l=1$ и найти $a^\nu{}_{10}(x)$. Далее, из уравнений переноса (24) и условий (30) получаем $a^\nu{}_1(y)$ и, значит, можем определить $A^\nu{}_{2j}(y)$. Решаем систему (37) при $l=2$ и т. д. ■

Замечание. Справедливы аналоги теорем 2, 3, в которых быстро осциллирующие начальные данные задаются не при $t=0$, а на произвольной гладкой поверхности. Вместо выполнения ус-

ловия теоремы 1 теперь требуется выполнение условий теоремы 6 гл. III, а формальное асимптотическое решение будет существовать в области ω, определенной в этой теореме.

Параметрикс задачи Коши. Пусть теперь $P(y, i\partial/\partial y)$ — гиперболический оператор порядка m, где, как и прежде, $y=(y_0, y_1, \ldots, y_n)$, $y_0=t$, $y'=x$. Назовем функции $E_N(y,z)$, где $z\in R^n$, $N>0$ — целое, *параметриксом задачи Коши* для оператора $P(y, i\partial/\partial y)$, если в некоторой окрестности $\omega\subset R^{n+1}$ гиперплоскости $t=0$ функции E_N являются решениями задачи

$$\left\{\begin{array}{l} P\left(y,\ i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)E_N=g_N(y,z), \quad y\in\omega, \\ \left.\dfrac{\partial^j E_N}{\partial t^j}\right|_{t=0}=\begin{cases} h_{j,N}(x,z), & 0\leqslant j<m-1, \\ \delta(x-z)+h_{m-1,N}(x,z), & j=m-1, \end{cases} \end{array}\right. \tag{38}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция,

$$g_N\in C^{N_1}(\omega\times R^n),\quad h_{j,N}\in C^{N_1}(R^n\times R^n),\quad \lim_{N\to\infty}N_1=\infty. \tag{39}$$

Если E — функция Грина задачи Коши (т. е. решение задачи (38) с $g_N\equiv 0$, $h_{j,N}\equiv 0$, $0\leqslant j\leqslant m-1$), то разность E_N-E будет решением задачи Коши с гладкими правыми частями и, значит, будет как угодно гладкой, если N достаточно велико. Таким образом, структуры особенностей (разрывов функции и ее производных) у E и E_N одинаковы. Имея явную формулу для E_N, мы можем изучить ее особенности и тем самым получить особенности функции Грина. В частности, это дает фронты волн и особенности на фронтах для задачи о колебаниях сред, вызванных точечным источником. Параметрикс позволяет решить и многие другие задачи, например свести решение задачи Коши к интегральному уравнению с гладким ядром. Мы остановимся только на явной конструкции параметрикса.

Для $\sigma\in R^n$ через $\dot\sigma$ обозначим вектор $\sigma/|\sigma|$. При каждом фиксированном z, $\dot\sigma$ и $|\sigma|\to\infty$ построим с помощью теоремы 3 решение задачи

$$\left\{\begin{array}{l} P\left(y,\ i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)u_N=O(|\sigma|^{-N+m-2}), \\ \left.\dfrac{\partial^j u_N}{\partial t^j}\right|_{t=0}=\begin{cases} O(|\sigma|^{-N+j-1}), \ 0\leqslant j<m-1, \\ (2\pi)^{-n}e^{-i\langle x-z,\,\dot\sigma\rangle|\sigma|}+O(|\sigma|^{-N+m-2}), j=m-1. \end{cases} \end{array}\right. \tag{40}$$

Выполнение предположений этой теоремы следует из гиперболичности P. Обозначим через $\psi(\sigma)$ какую-нибудь бесконечно дифференцируемую функцию, равную единице в некоторой окрестности бесконечности и нулю — в некоторой окрестности точки $\sigma=0$. На формальном уровне (не заботясь о сходимости встречающихся интегралов) с помощью формул (31)—(34) легко можно пока-

зать, что функция

$$E_N = \int\limits_{R^n} \psi(\sigma) u_N(y, z, \dot{\sigma}, |\sigma|)\, d\sigma \tag{41}$$

будет решением задачи (38), (39). Для придания строгого смысла интегралу (41) и встречающимся ниже аналогичным выражениям, будем рассматривать функции E_N и u_N как обобщенные функции по переменной z из пространства $D'(R^n)$, зависящие от остальных переменных как от параметров. Таким образом, равенство (41) есть краткая запись того, что для любой основной функции $\varphi = \varphi(z) \in D(R^n)$

$$\int\limits_{R^n} E_N \varphi\, dz = \int\limits_{R^n} \psi(\sigma) \int\limits_{R^n} u_N \varphi\, dz\, d\sigma. \tag{42}$$

Теорема 4. *Функция* (41) *является решением задачи* (38).

Доказательство. Пусть v_N — решение задачи (40) с $z=0$. Построим его. Для этого нужно решить задачу

$$H(y, \nabla S) = 0, \quad S|_{t=0} = \langle x, \dot{\sigma} \rangle, \tag{43}$$

где H — старшая однородная часть полинома $P(y, q)$. В силу теоремы 1 ее решения выражаются через лучи $y = y^\nu(\tau, \eta; \dot{\sigma})$ системы Гамильтона

$$y'_\tau = H'_q(y, q), \quad q'_\tau = -H'_y(y, q), \tag{44}$$

отвечающие бихарактеристикам, выпущенным из точек

$$(y, q)|_{\tau=0} = (0, \eta, \lambda_\nu(\eta, \dot{\sigma}), \dot{\sigma}), \quad 1 \leqslant \nu \leqslant m, \tag{45}$$

где λ_ν, $1 \leqslant \nu \leqslant m$, — корни относительно λ уравнения $H(0, \eta, \lambda, \dot{\sigma}) = 0$. В силу гиперболичности P корни этого уравнения вещественны и различны. Тогда в силу теоремы 1 при каждом $\dot{\sigma}$ существует окрестность ω гиперплоскости $t=0$, через каждую точку которой проходит ровно один луч каждого семейства $y = y^\nu(\tau, \eta; \dot{\sigma})$, $1 \leqslant \nu \leqslant m$, и $D(y^\nu)/D(\tau, \eta) \neq 0$ в ω. Поскольку функция y^ν бесконечно дифференцируемо зависит от всех своих аргументов, а множество точек $\dot{\sigma}$ компактно, то область ω можно выбрать не зависящей от $\dot{\sigma}$. Таким образом, из теоремы 1 следует, что задача (43) имеет m решений $S = S^\nu(y, \dot{\sigma})$, $1 \leqslant \nu \leqslant m$, и эти решения равны

$$S^\nu = \langle \eta^\nu(y, \dot{\sigma}), \dot{\sigma} \rangle,$$

где η^ν — точка гиперплоскости $t=0$, из которой нужно выпустить луч (44), (45), чтобы он прошел через точку $y \in \omega$. Очевидно, S^ν — бесконечно дифференцируемая функция своих аргументов. Теперь в силу теоремы 3

$$v_N = \sum_{\nu=1}^{m} e^{-i\langle \eta^\nu(y, \dot{\sigma}), \dot{\sigma} \rangle |\sigma|} \sum_{l=0}^{N} a_l^\nu(y, \dot{\sigma}) |\sigma|^{-l},$$

где $a^{\nu}{}_l$ — некоторые бесконечно дифференцируемые функции своих аргументов.

Очевидно, если v_N — решение задачи (40) с $z=0$, то функция $u_N=v_N \exp(i<z, \sigma>)$ будет решением этой задачи при любом z. Тот же результат получится, если с помощью теоремы 3 решать задачу (40) сразу при любом z. Итак,

$$u_N = \sum_{\nu=1}^{m} e^{-i<\eta^{\nu}(y,\, \dot{\sigma})-z, \dot{\sigma}>|\sigma|} \sum_{l=0}^{N} a_l^{\nu}(y,\, \dot{\sigma})\, |\sigma|^{-l}.$$

Теперь, если E_N — функция, определенная формулами (41), (42), то для любой функции $\varphi \in D(R^n)$

$$\int_{R^n} E_N \varphi\, dz = \int_{R^n} \psi(\sigma)\, \tilde{\varphi}(\sigma)\, v_N(y, \sigma)\, d\sigma,$$

где $\tilde{\varphi}(\sigma)$ — преобразование Фурье функции $\varphi(z)$. Из явного вида v_N следует, что для любого оператора D^{α} (формула (1)) справедлива оценка: $|D^{\alpha} v_N| \leqslant C_{\alpha}(y)\, |\sigma|^{|\alpha|}$, $|\sigma|>1$. Так как, кроме того, функция $\tilde{\varphi}(\sigma)$ убывает на бесконечности быстрее любой степени $|\sigma|^{-1}$, а $\psi(\sigma)=0$ в некоторой окрестности точки $\sigma=0$, то

$$D^{\alpha} \int_{R^n} E_N \varphi\, dz = \int_{R^n} \psi(\sigma)\, \tilde{\varphi}(\sigma)\, D^{\alpha} v_N(y, \sigma)\, d\sigma.$$

Отсюда и из формул (31), (33) для функции v_N получаем, что

$$P\left(y,\, i\frac{\partial}{\partial y}\right) \int_{R^n} E_N \varphi\, dz = \int_{R^n} \psi(\sigma)\, \tilde{\varphi}(\sigma) \sum_{\nu=1}^{m} e^{-iS^{\nu}|\sigma|} \times$$

$$\times \sum_{l=N+2}^{N+m} b_l^{\nu}(y,\, \dot{\sigma})\, |\sigma|^{m-l}\, d\sigma,$$

т. е. если $N-m+2>n$, то

$$P\left(y,\, i\frac{\partial}{\partial y}\right) E_N =$$

$$= \int_{R^n} \psi(\sigma) \sum_{\nu=1}^{m} e^{-i<\eta^{\nu}(y,\, \dot{\sigma})-z,\, \dot{\sigma}>|\sigma|} \sum_{l=N+2}^{N+m} b_l^{\nu}(y,\, \dot{\sigma})\, |\sigma|^{m-l}\, d\sigma.$$

Последний интеграл при $N-m+2>n$ абсолютно сходится. Более того, если от подынтегрального выражения взять производную по переменным y, z порядка не выше $N-m-n+1$, то интеграл будет сходиться абсолютно и равномерно по $y \in \omega$, $z \in R^n$. Значит, выполнено первое из соотношений (39) с $N_1=N-m-n+1$. Точно так же (с помощью формул (32), (34) вместо (31), (33)) до-

казывается, что

$$\left.\frac{\partial^j E_N}{\partial t^j}\right|_{t=0}=\begin{cases} h_{j,N}(x, z),\ 0\leqslant j<m-1, \\ (2\pi)^{-n}\int\limits_{R^n}\psi(\sigma)\, e^{-i\langle x-z,\sigma\rangle}\, d\sigma+\widehat{h}(x, z),\ j=m-1, \end{cases}$$

где

$$h_{j,N}\in C^{N-n-j}(R^n\times R^n),\ \ \widehat{h}\in C^{N-n-m+1}(R^n\times R^n).$$

Поскольку, очевидно,

$$\int\limits_{R^n}(1-\psi(\sigma))\, e^{-i\langle x-z,\sigma\rangle}\, d\sigma\in C^\infty(R^n\times R^n),$$

то это доказывает и второе из соотношений (39). ■

Назовем коноидом с вершиной в точке $z\in R^n$ поверхность C_z в R^{n+1}, образованную лучами системы (44), отвечающими бихарактеристикам, выпущенным из точек $(y, q)|_{\tau=0}=(0, z, q^0)$, где $q^0\in R^{n+1}$ — произвольный вектор такой, что $|q^0|=1$ и $H(0, z, q^0)=0$.

Задача. Докажите, что $E_N\in C^\infty((\omega\setminus C_z)\times R^n)$.

Указание. Сначала надо доказать, что если $S=S(y, \alpha)$ — зависящее от параметра $\alpha\in R^1$ решение уравнения $H(y, \nabla_y S)=0$, то $\partial S/\partial\alpha$ — первый интеграл системы Гамильтона (44). Доказывается дифференцированием уравнения $H(y, \nabla_y S)=0$ по α. Значит, если S^ν — построенные при доказательстве теоремы 4 решения задачи (43), то $\nabla_\sigma(S^\nu|\sigma|)=\text{const}$ вдоль бихарактеристик. т. е.

$$\nabla_\sigma[S^\nu(y, \dot{\sigma})|\sigma|]=\{\nabla_\sigma[S^\nu(0, x, \dot{\sigma})|\sigma|]\}|_{x=\eta^\nu(y, \dot{\sigma})}=$$

$$=\{\nabla_\sigma[\langle x, \sigma\rangle]\}|_{x=\eta^\nu(y, \dot{\sigma})}=\eta^\nu(y, \dot{\sigma}).$$

Если Φ^ν — фазовая функция в выражении для u_N (см. доказательство теоремы 4), то

$$\nabla_\sigma\Phi^\nu=z-\eta^\nu(y, \dot{\sigma}),\ \text{т. е. } \nabla_\sigma\Phi^\nu\neq 0$$

при $y\,\overline{\in}\, C_z$. Дальше E_N исследуется с помощью приема, использованного при доказательстве теоремы 6 гл. I.

Системы уравнений. Пусть $P(y, i\partial/\partial y; k)$ — матрица размера $d\times d$ из операторов порядка не выше m и

$$P(y, q; k)=\sum_{j=0}^{m}P_j(y, q; k),$$

где P_j — однородные матрицы порядка $m-j$ по совокупности переменных q и k. Как и раньше, через $H(y, q)$ обозначим функцию

$$H(y, q)=\det P_0(y, q; 1).$$

В рассматриваемой ситуации, как и в случае одного уравнения, система (9) имеет формальные асимптотические решения вида

(10), где S — функция, a_j — вектор-функции. При этом функция $S(y)$ определяется по своим начальным значениям $S(0, x) = S_0(x)$ из решения задачи (13) с помощью теоремы 1. Чтобы сформулировать аналоги теорем 2—4, введем некоторые обозначения. Поскольку построенные в теореме 1 функции $S = S^\nu$, $1 \leqslant \nu \leqslant M$, являются решениями уравнения (13), то матрица

$$P_0(y, \nabla S(y); 1) \tag{46}$$

вырождена. Предположим, что при $y = (0, x)$ и любых $x \in R^n$ она имеет ранг $d-1$. Уменьшив, если это нужно, окрестность ω гиперплоскости $t=0$, построенную в теореме 1, можно добиться того, чтобы матрица (46) имела ранг $d-1$ при всех $y \in \omega$. Пусть $r = r(y)$ — ее правый нуль-вектор и $l = l(y)$ — левый.

Лемма 7. *Если $S = S(y)$ — решение задачи* (13), *то* $|H'_q(y, \nabla S)| \neq 0$ *при $y \in \omega$ и существует такая функция $\alpha(y)$, что*

$$l(y) \nabla_q P_0(y, \nabla S; 1) r(y) = \alpha(y) H'_q(y, \nabla S), \quad y \in \omega. \tag{47}$$

Доказательство. В силу теоремы 1 $D(y^\nu)/D(\tau, \eta) \neq 0$ при $y \in \omega$. Первой строчкой указанной матрицы Якоби в силу системы (16) является вектор $H'_q(y, q)$, где $q = \nabla S$. Значит, $H'_q(y, \nabla S) \neq 0$.

Зафиксируем $y = y^0 \in \omega$, и пусть $q^0 = \nabla S(y^0)$. Рассмотрим матрицу $P_0(y^0, q; 1)$ и функцию $H(y^0, q)$ в некоторой окрестности $V \subset R^{n+1}$ точки $q = q^0$. Если окрестность V достаточно мала, то $|H'_q(y^0, q)| \neq 0$ при $q \in V$ и в этой окрестности уравнение $H(y^0, q) = 0$ определяет бесконечно дифференцируемую поверхность Q, причем вектор $H'_q(y^0, q)$ ортогонален Q. При $q \in Q$ матрица $P_0(y^0, q; 1)$ вырождена, и если окрестность V достаточно мала, то эта матрица имеет ранг $d-1$ при $q \in Q$. Пусть $\hat{r}(q)$ — ее правый нуль-вектор, $\hat{l}(q)$ — левый. Очевидно, $\hat{r}(q^0) = r(y^0)$, $\hat{l}(q^0) = l(y^0)$. Так как $\hat{l}(q) P_0(y^0, q; 1) \hat{r}(q) = 0$ при $q \in Q$, то вектор $\nabla_q [\hat{l}(q) P_0(y^0, q; 1) \hat{r}(q)]$ ортогонален Q. Значит,

$$\nabla_q [\hat{l}(q) P_0(y^0, q; 1) \hat{r}(q)] = \alpha(y^0, q) \nabla_q H(y^0, q). \tag{48}$$

Поскольку $\hat{l}$ и $\hat{r}$ — нуль-векторы матрицы P_0, то $\nabla_q(\hat{l} P_0 \hat{r}) = \hat{l}(\nabla_q P_0) \hat{r}$. Преобразовав с помощью этого соотношения левую часть (48) и положив затем в (48) $q = q^0$, получим (47) с $y = y^0$. ■

Заметим, что функция $\alpha(y)$, определенная в лемме 7, легко вычисляется, если известно решение $S(y)$ задачи (13). При $t=0$ она может быть найдена без отыскания функции S, поскольку $\nabla S(y)$ при $t=0$ дается формулой (17).

В дальнейшем будет предполагаться, что $\alpha(y) \neq 0$.

Заметим, что это условие выполнено, например, для систем любого порядка, у которых матрица $P_0(y, \nabla S; 1)$ симметрична и $\frac{\partial}{\partial \lambda} P_0(y, \nabla S; 1) = c(y) E$, где E — единичная матрица и функция $c(y) \neq 0$ (в частности, для симметрических систем первого порядка, разрешенных относительно $\partial u/\partial t$). Действительно, в этом

случае первая компонента вектора, стоящего в левой части равенства (47), равна $c(y)l(y)r(y)$. Она отлична от нуля, поскольку при сделанных предположениях вектор-строка $l(y)$ получается транспонированием вектор-столбца $r(y)$. Значит, $\alpha(y)\neq 0$.

Прежде чем формулировать условие теоремы, напомним, что в силу леммы 6 утверждения лемм 3—5 остаются справедливыми и в матричном случае. Конечно, при этом операторы Q_j, участвующие в формулировке этих лемм, являются матричными. Через $h(y)$ обозначается выражение, стоящее в квадратных скобках в правой части формулы (8), где $P_0(y, q)$ и $P_1(y, q)$ определены в лемме 5. В рассматриваемом случае h — это матрица. Функция g_j, определенная в формуле (19), является вектор-функцией. Пусть $\beta(y)=l(y)h(y)r(y)-\langle l(y)\nabla_q P_0(y, \nabla S; 1), \nabla r(y)\rangle$, $\gamma_j(y)= =l(y)g_j(y)$.

Теорема 5. *Пусть* $S_0\in C^\infty(R^n)$, $\operatorname{Im} S_0\equiv 0$, *выполнено условие теоремы* 1 *и* $S=S(y)$, $y\in\omega$ — *одно из построенных в теореме* 1 *решений задачи* (13). *Пусть при всех* $y\in\omega$ *ранг матрицы* (46) *равен* $d-1$ *и* $\alpha(y)\neq 0$ *при* $y\in\omega$. *Тогда при любом* $N<\infty$ *существуют такие вектор-функции* $a_j=a_j(y)\in C^\infty(\omega)$, $0\leqslant j\leqslant N$, *что вектор-функция* (20) *будет решением системы*

$$P\left(y,\ i\frac{\partial}{\partial y};\ k\right)u = O\left(k^{-N+m-1}\right),\ k\to\infty,$$

где правая часть равна

$$e^{-ikS(y)}\sum_{j=N+1}^{N+m} b_j(y)\,k^{m-j},\quad b_j\in C^\infty(\omega).$$

При этом $a_j(y)=\mu_j(y)r(y)+d_j(y)$, *где после выбора функции* $S(y)$ *вектор-функция* $d_j(y)$ *определяется однозначно из некоторой алгебраической системы уравнений по функциям* $a_l(y)$, $0\leqslant l\leqslant j-1$ $(d_0\equiv 0)$, $r(y)$ — *правый нуль-вектор матрицы (46), а коэффициенты* $\mu_j(y)$ *могут иметь любые начальные условия при* $t=0$ *и удовлетворяют рекуррентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнений переноса), выполняющихся вдоль лучей* $y=y(\tau,\eta)$ *задачи* (16), (17), *соответствующих выбранной функции* S:

$$\alpha\left(y(\tau,\eta)\right)\frac{d}{d\tau}\mu_j-\beta\left(y(\tau,\eta)\right)\mu_j=\begin{cases}0 & j=0,\\ \gamma_j\left(y(\tau,\eta)\right), & j>0.\end{cases}\tag{49}$$

Доказательство. Как и в случае одного уравнения, подставив выражение (20) в систему (9), получим выражение (25), где вектор-функции b_j имеют вид (26). Поскольку ранг матрицы $Q_0(y)$ равен $d-1$ при всех $y\in\omega$, то, положив $b_0=0$, получаем, что $a_0=\mu_0(y)r(y)$, где функция $\mu_0(y)$ пока произвольна.

Положив $b_1=0$, получаем следующую систему для определения вектора a_1:

$$Q_0(y)\,a_1=-Q_1\left(y,\ i\frac{\partial}{\partial y}\right)a_0(y).\tag{50}$$

Поскольку матрица Q_0 вырождена, то эта система имеет решение тогда и только тогда, когда правая часть ортогональна вектору $l(y)$, т. е. $lQ_1(\mu_0 r)=0$. Вспомнив явный вид оператора Q_1 (леммы 5, 6), последнее уравнение можно переписать в следующем виде:

$$<l\nabla_q P_0(y, \nabla S; 1), \nabla(\mu_0 r)> - lh\mu_0 r = 0.$$

Дифференцируя второй сомножитель в скалярном произведении, получаем

$$<l\nabla_q P_0(y, \nabla S; 1) r, \nabla\mu_0> - \beta(y)\mu_0 = 0.$$

В силу леммы 7 последнее уравнение можно переписать следующим образом:

$$\alpha(y) <\nabla\mu_0, \nabla_q H(y, \nabla S)> - \beta(y)\mu_0 = 0,$$

что эквивалентно уравнению (49) с $j=0$. Последний переход доказывается точно так же, как и переход от уравнений (27) к (24).

Таким образом, если μ_0 удовлетворяет уравнению (49), то система (50) разрешима. Ее решения определяются с точностью до слагаемого $\mu_1(y) r(y)$. Пусть $d_1(y)$ — частное решение системы (50). Например, можно взять в качестве $d_1(y)$ вектор, ортогональный $r(y)$. Тогда из (50) получаем, что $a_1(y)=\mu_1(y) r(y)+d_1(y)$, где функция $\mu_1(y)$ пока произвольна и будет определяться на следующем шагу.

Полагая $b_2=0$, получаем из (26) следующую систему для определения вектора a_2:

$$Q_0(y) a_2 = -Q_1\left(y, i\frac{\partial}{\partial y}\right) a_1(y) + ig_1(y). \tag{51}$$

Она разрешима, если $l(Q_1 a_1 - ig_1)=0$, что приводит к уравнению (49) для μ_1 точно так же, как только что уравнение $lQ_1 a_0=0$ приводило к уравнению (49) для μ_0. Таким образом, если μ_1 удовлетворяет уравнению (49) с $j=1$, то система (51) разрешима. Ее решения имеют вид $a_2=\mu_2(y) r(y)+d_2(y)$, где $d_2(y)$ — частное решение системы, а функция $\mu_2(y)$ произвольна. Полагая $b_3=0$, получаем уравнения для μ_2 и d_3 и т. д. ■

Аналог теоремы 3 в случае систем мы для простоты приведем только для систем первого порядка вида

$$iu_t'(t, x) + L\left(t, x, i\frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x) = O(k^{-N}), \tag{52}$$

$$u(0, x) = e^{-ikS_0(x)} \sum_{l=0}^{N} c_l(x) k^{-l} + O(k^{-N-1}), \quad \operatorname{Im} S_0 = 0, \tag{53}$$

где u и c_l — векторы из d компонент, L — матрица размера $d\times d$ из дифференциальных операторов первого порядка. Пусть L_0 — старшая однородная часть матрицы L, получающаяся после от-

брасывания у операторов, составляющих матрицу L, свободных членов. Тогда $P_0(y, q)=\lambda E+L_0(y, p)$, где $q=(\lambda, p)$ и E — единичная матрица. Как и раньше, предполагается, что функция $H(y, q)=\det\{\lambda E+L_0(y, p)\}$ — вещественнозначная. Пусть уравнение

$$H(0, x, \lambda, \nabla S_0(x))\equiv\det\{\lambda E+L_0(0, x, \nabla S_0(x))\}=0 \qquad (54)$$

при каждом $x\in R^n$ имеет d различных вещественных корней $\lambda=\lambda_\nu(x)$, $1\leqslant\nu\leqslant d$. В частности, эти условия выполнены, если система (52) гиперболична и $|\nabla S_0(x)|\neq 0$, $x\in R^n$.

Теорема 6. *Пусть уравнение* (54) *при каждом* $x\in R^n$ *имеет* d *различных вещественных корней* $\lambda=\lambda_\nu(x)$, $1\leqslant\nu\leqslant d$, *и* $S=S^\nu(y)$, $y\in\omega$, $1\leqslant\nu\leqslant d$, — *построенные в теореме* 1 *решения задачи* (13). *Тогда для всех решений* $S=S^\nu(y)$ *задачи* (13) *выполнены условия теоремы 5, и если*

$$u^\nu(y)=e^{-ikS^\nu(y)}\sum_{j=0}^{N}a_j^\nu(y)\, k^{-j}$$

— *построенные в теореме 5 формальные асимптотические решения уравнения* (52), *где* $a_j^\nu(y)=\mu_j^\nu(y)\,r^\nu(y)+d_j^\nu(y)$, *то начальные условия* $\mu_{j0}^\nu(x)=\mu_j^\nu(0, x)$ *можно задать так, чтобы функция* $u=\sum_{\nu=1}^{d}u^\nu$ *была решением задачи* (52), (53).

Доказательство. Условие на корни уравнения (54) означает, что все собственные значения матрицы $L_0(0, x, \nabla S_0(x))$ вещественны и различны. Отсюда следует, во-первых, что ее собственные векторы $r^\nu_0(x)$, $1\leqslant\nu\leqslant d$, при каждом $x\in R^n$ образуют базис в R^d и, во-вторых, что ранг матрицы $P_0(y, \nabla S^\nu(y))$ при $t=0$ равен $d-1$. Взяв окрестность ω достаточно малой, можно добиться того, чтобы ранг этой матрицы был равен $d-1$ при всех $y\in\omega$ (напоминаем, что в силу уравнения (13) она вырождена). Таким образом, в рассматриваемом случае условия теоремы 5 выполнены для любого решения $S=S^\nu(y)$ задачи (13). Значит, функция $u=\Sigma u^\nu$ будет решением системы (52).

Остается обеспечить выполнение условия (53), для чего, очевидно, достаточно, чтобы

$$\sum_{\nu=1}^{d}\mu_{j0}^\nu(x)\,r^\nu(0, x)=c_j(x)-\sum_{\nu=1}^{d}d_j^\nu(0, x),\ 0\leqslant j\leqslant N. \qquad (55)$$

Так как $r^\nu(0, x)=\text{const}\cdot r^\nu_0(x)$, то векторы $r^\nu(0, x)$ при каждом $x\in R^n$ образуют базис в R^d. Значит, при каждом j система (55) может быть решена относительно μ^ν_{j0} при любой правой части. Векторы $d^\nu_j(y)$ определяются по $a^\nu_l(y)$, $0\leqslant l<j$ и $d^\nu_0(y)\equiv 0$. Решив систему (55) при $j=0$, находим $\mu^\nu_{00}(x)$. Далее, из уравнений переноса (49) с $j=0$ определяем $\mu^\nu_0(y)$ и, значит, $a^\nu_0(y)$. По этой

вектор-функции строим $d^{\nu}{}_1(y)$ и, решая систему (55) с $j=1$, находим $\mu^{\nu}{}_{10}(x)$. Затем опять решаем уравнение переноса для определения $\mu^{\nu}{}_1(y)$. Получаем $a^{\nu}{}_1(y)$ и, значит, $d^{\nu}{}_2(y)$ и т. д. Таким образом, система (55) может быть последовательно решена при всех $j=0, 1, \ldots, N$. ■

Заметим, что правые части в задаче (52), (53) для построенного в теореме 6 решения имеют структуру, аналогичную той, которую имели правые части в задаче (31), (32). Поэтому с помощью теоремы 6 можно построить параметрикс задачи Коши для системы (52) точно так же, как это было сделано в случае одного уравнения.

Очевидно, все результаты этого параграфа имеют локальный характер, т. е. их можно сформулировать так, чтобы точка x принадлежала некоторому компакту, а не R^n.

§ 3. Разрывные решения уравнений

Пусть $P(t, x, i\partial/\partial t, i\partial/\partial x)$ — линейный дифференциальный оператор порядка m в ограниченной области $\Omega\subset R^{n+1}$ с бесконечно дифференцируемыми в $\bar{\Omega}$ коэффициентами. Будем искать разрывные решения уравнения

$$P\left(y,\ i\frac{\partial}{\partial y}\right)u = f(y) \in C^{\infty}(\bar{\Omega}),\ y=(t,\ x). \tag{56}$$

Для описания разрывов введем обобщенную функцию от одной переменной $s\in R^1$:

$$\chi_\alpha = \frac{s_+^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \in D'(R^1),$$

где $\Gamma(\alpha+1)$ — гамма-функция. При $\operatorname{Re}\alpha>-1$ эта функция определяется формулой

$$(\chi_\alpha, \varphi) = \int\limits_{s>0} \frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\varphi(s)\,ds, \quad \varphi\in D(R^1),$$

а при $\operatorname{Re}\alpha\leqslant-1$ она определяется с помощью аналитического продолжения по α (см. [46]). В частности, при $\alpha=-m$, $m>0$, эта функция совпадает с $\delta^{(m-1)}(s)$.

Пусть S — бесконечно дифференцируемая поверхность в $\bar{\Omega}$, заданная уравнением $s(y)=0$, $s\in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\operatorname{Im} s\equiv0$, $\nabla s\neq0$ при $y\in S$. Предположим, что $u\in C^\infty(\bar{\Omega}\setminus S)$, а в окрестности поверхности S функция u имеет особенность типа $\psi(y)\chi_\alpha(s(y))$, $\psi\in C^\infty(\bar{\Omega})$. Константа α определяет порядок особенности функции u на S. В частности, при целых $\alpha=m\geqslant0$ это означает, что производная порядка m от функции u по направлению нормали к S терпит скачок при переходе через S, а величина этого скачка равна $\psi|\nabla s|^m$, $y\in S$.

Более точное предположение относительно функции u заключается в следующем. Пусть существуют такие $N\geqslant 0$, $\alpha\in R^1$ и функции $\psi_j\in C^\infty(\overline{\Omega})$, $0\leqslant j\leqslant N$, что

$$u(y)=\sum_{j=0}^{N}\psi_j(y)\chi_{\alpha+j}(s(y))+h_N(y), \tag{57}$$

где $s\in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\operatorname{Im} s\equiv 0$, $\nabla s\neq 0$ при $y\in S$, $h_N\in W_1^{N+1+\{\alpha\}}$. Здесь и ниже через $\{\alpha\}$ обозначается наименьшее целое число такое, что $\{\alpha\}\geqslant\alpha$, а через $W^r{}_1$ — пространство обобщенных функций в Ω, производные которых до порядка r включительно суммируемы в Ω. Заметим, что при любом β

$$\chi_\beta(s(y))\in W_1^{\{\beta\}}. \tag{58}$$

Для функции χ_α справедливо равенство

$$s\chi_\alpha(s)=(\alpha+1)\chi_{\alpha+1}(s). \tag{59}$$

Поэтому даже при фиксированных α и функции $s=s(y)$ коэффициенты ψ_j разложения (57) не определяются однозначно по функции u. Чтобы устранить эту неоднозначность, разложим функции ψ_j в окрестности поверхности S в ряд по степеням функции s. Для этого предположим, что в $\overline{\Omega}$ существует гладкая невырожденная замена переменных $(t,x)\to(s,z)$, $z=(z_1,\ldots,z_n)$, переводящая поверхность S в часть гиперплоскости $s=0$. Сделав эту замену, представим функции ψ_j в виде суммы N членов ряда Тейлора по степеням s с остаточным членом в форме Лагранжа и избавимся от степеней s с помощью формулы (59). Таким образом, формула (57) перепишется в виде

$$u(y)=\sum_{j=0}^{N}\varphi_j(z(y))\chi_{\alpha+j}(s(y))+g_N(y), \tag{60}$$

где

$$s\in C^\infty(\overline{\Omega}),\ \operatorname{Im} s\equiv 0,\ \nabla s\neq 0 \text{ при } y\in S,\ g_N\in W_1^{N+1+\{\alpha\}},$$

$\varphi_j\in C^\infty(\overline{\Omega})$ и функции φ_j определяются однозначно по функциям ψ_k, $0\leqslant k\leqslant j$. Обозначим через $\varphi|_S$ значения функции φ на поверхности $S=\{y: y\in\Omega, s(y)=0\}$ и через $a^\alpha{}_{kj}$, $k\leqslant j$, константу $(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)\cdot\ldots\cdot(\alpha+j+1)/(j-k+1)!$. Из сказанного выше следует

Лемма 8. *Если для функции u справедливо разложение* (57), *то ее можно записать в виде* (60), *где*

$$\varphi_0|_S=\psi_0|_S;\ \varphi_{1+j}|_S=\psi_{1+j}|_S+\sum_{k=0}^{j}\left(a_{kj}^\alpha\frac{\partial^{j-k+1}}{\partial s^{j-k+1}}\psi_k\right)\Big|_S,\ 0\leqslant j\leqslant N-1.$$

Замечание. Поскольку функции φ_j не зависят от s, то они полностью определяются своими значениями на поверхности S. Для конкретного счета бывает полезно следующее очевидное равенство

$$\partial^l/\partial s^l = [|\nabla_y s|^{-2} < \nabla_y s, \nabla_y >]^l. \tag{61}$$

Лемма 9. *Пусть функция u в области $\Omega \subset R^{n+1}$ представима в виде* (60). *Тогда при фиксированных α и функции $s=s(y)$ коэффициенты φ_j однозначно определяются функцией u.*

Доказательство. Надо показать, что $\varphi_j=0$, $0 \leqslant j \leqslant N$, если $u=0$ как элемент $D'(\Omega)$. Пусть $z=z_0$, $s=0$ — произвольная точка на S и $\psi \in D(\Omega)$ — основная функция вида $\psi = J^{-1} v(z) \times \times h(s) \exp(i\lambda s)$, где $J = |D(s,z)/D(y)|$, $v \in C_0^\infty(R^n)$, $h \in C_0^\infty(R^1)$, $h(s)=1$ в некоторой окрестности точки $s=0$ и носители функций v, h находятся в настолько малых окрестностях точек $z=z_0$, $s=0$ соответственно, что $\operatorname{supp} \psi \in \Omega$. Тогда

$$(u, \psi) = \int_{R^{n+1}} u(y) \psi(y)\, dy = \int_{R^{n+1}} u \psi J \, ds\, dz.$$

Отсюда, поскольку $u=0$, имеем

$$\sum_{j=0}^{N} \Big[\int_{R^n} \varphi_j(z) v(z)\, dz \int_{R^1} \chi_{\alpha+j}(s) h(s) e^{i\lambda s}\, ds \Big] +$$

$$+ \int_{R^{n+1}} g_N v(z) h(s) e^{i\lambda s}\, ds\, dz = 0. \tag{62}$$

Оценим каждое слагаемое в равенстве (62) при $\lambda \to \infty$. Если $F_{s\to\lambda}$ — оператор преобразования Фурье по переменной s, то при любом целом $M \geqslant 0$ и $\lambda \neq 0$

$$F_{s\to\lambda}\{[1-h(s)]\chi_{\alpha+j}(s)\} = (-i\lambda)^{-M} F_{s\to\lambda} q(s), \tag{63}$$

где

$$q(s) = \frac{d^M}{ds^M}[(1-h(s))\chi_{\alpha+j}(s)].$$

Очевидно, $q(s) \in C^\infty(R^1)$ при всех M, $\alpha+j$ и $q(s) = Cs^{\alpha+j-M}$ при $s \gg 1$ ($C=0$, если α целое, $\alpha+j<M$). Значит, при $M>\alpha+j+1$ функция $F_{s\to\lambda} q$ ограничена при $\lambda \in R^1$. Отсюда следует, что левая часть равенства (63) является при $\lambda \neq 0$ регулярной функцией, имеющей порядок $O(\lambda^{-\infty})$ при $\lambda \to \infty$. Это вместе с равенством [46] $F_{s\to\lambda}\chi_\beta = i\exp(i\beta\pi/2)\lambda^{-\beta-1}$, $\lambda \neq 0$, приводит к тому, что при $\lambda \to \infty$

$$\int_{R^1} \chi_{\alpha+j}(s) h(s) e^{i\lambda s}\, ds = ie^{i(\alpha+j)\pi/2} \lambda^{-\alpha-j-1} + O(\lambda^{-\infty}).$$

Легко показать, что последнее слагаемое в левой части формулы (62) имеет порядок $o(\lambda^{-N-1-\{\alpha\}})$ при $\lambda \to \infty$. Таким образом,

формула (62) при $\lambda\to\infty$ имеет вид

$$\sum_{j=0}^{N}\left\{ie^{i(\alpha+j)\pi/2}\int_{R^n}\varphi_j(z)\,v(z)\,dz\,(\lambda^{-\alpha-j-1}+O(\lambda^{-\infty}))\right\}=o(\lambda^{-N-1-\{\alpha\}}).$$

Отсюда следует, что все интегралы, входящие в последнюю формулу, равны нулю. Так как функция v произвольна, это доказывает утверждение леммы 9. ■

Нашей целью является описание поверхности $S=\{y:y\in\Omega,\ s(y)=0\}$, на которой решение вида (60) уравнения (56) теряет гладкость, и коэффициентов φ_j в равенстве (60), характеризующих количественно соответствующие разрывы. При этом, согласно замечанию к лемме 8, функции φ_j достаточно знать лишь на поверхности S. Напомним, что через $q=(q_0, q_1, \ldots, q_n)$ обозначаются переменные, двойственные к y. Через $A_j(y)$ обозначим функцию

$$A_j(y)=-h(y)+(\alpha-m+j+1)\,|\nabla s(y)|^{-2}\langle\nabla s,\nabla_y(H(y,\nabla s))\rangle,$$

где $h(y)$ — функция, стоящая в правой части формулы (8) в квадратной скобке.

Теорема 7. *Пусть $P(y, i\partial/\partial y)$ — гиперболический оператор порядка m, функция u в ограниченной области $\Omega\subset R^{n+1}$ представима при некоторых $N>0$, $\alpha\in R^1$ в виде* (60), *где φ_0 почти всюду на S отлична от нуля, и*

$$P\left(y,\ i\frac{\partial}{\partial y}\right)u\in W_1^{N+1+\{\alpha\}-m}. \tag{64}$$

Тогда:

1. *Поверхность S — характеристическая.*

2. *Если $y^0=(t_0, x^0)\in S$ и S_0 — сечение поверхности S гиперплоскостью $t=t_0$, то существует окрестность $V\subset R^{n+1}$ точки y^0, в которой:* а) *поверхность S_0 записывается в виде $t=t_0$, $x=x(\xi)$, $\xi\in U\subset R^{n-1}$, где $x(\xi)\in C^\infty(U)$,* $\operatorname{rank}\partial x/\partial\xi=n-1$, б) *поверхность S составлена из лучей $y=y(\tau,\xi)$ системы Гамильтона:*

$$\frac{dy}{d\tau}=H'_q(y,q),\quad \frac{dq}{d\tau}=-H'_y(y,q), \tag{65}$$

отвечающих бихарактеристикам с начальными данными:

$$(y,q)|_{\tau=0}=(t_0,\ x(\xi),\ \nabla s(t_0,\ x(\xi))),\ \xi\in U.$$

3. *Функции*

$$\widehat{\varphi}_j(\tau,\xi)=\varphi_j|_{y=y(\tau,\xi)},\quad 0\leqslant j\leqslant N-1,$$

являются решениями рекуррентной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$F(\tau,\xi)\frac{d\widehat{\varphi}_j}{d\tau}+a_j(\tau,\xi)\,\widehat{\varphi}_j=f_j(\tau,\xi),\quad 0\leqslant j\leqslant N-1, \tag{66}$$

где функция $F(\tau,\xi)\neq 0$ *определена в теореме* 11 *гл.* III,

$$a_j(\tau,\xi)=A_j(y(\tau,\xi)),\quad f_0\equiv 0,$$

$$f_j(\tau,\xi)=\sum_{l=0}^{j-1} Q_{j,l}(\tau,\xi,\partial/\partial\tau,\ \partial/\partial\xi)\,\widehat{\varphi}_l,\ 0<j\leqslant N-1,$$

и $Q_{j,l}$ — *некоторые дифференциальные операторы порядка не выше* $j+1-l$ *с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами.*

Наоборот, если функция u *представима в виде* (60) *и выполнены утверждения* 1—3 *теоремы, то справедливо соотношение* (64).

Доказательство. Применяя лемму 3 к функции (60) и учитывая очевидное равенство $\chi'_\beta=\chi_{\beta-1}$, справедливое при любом $\beta\in R^1$, получаем, что

$$P\left(y,\ i\frac{\partial}{\partial y}\right)u=i^m\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{m}(R_k\varphi_j)\,\chi_{\alpha+j-m+k}+P\left(y,\ i\frac{\partial}{\partial y}\right)g_N=$$

$$=i^m\sum_{k=0}^{N}\left\{\left[\sum_{l=0}^{\min(k,m)}(R_l\varphi_{k-l})\right]\chi_{\alpha-m+k}\right\}+h_N,\tag{67}$$

где

$$R_s\left(y,\ i\frac{\partial}{\partial y}\right)=i^sQ_s\left(y,\ i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$h_N=P\left(y,\ i\frac{\partial}{\partial y}\right)g_N+\Sigma'(R_k\varphi_j)\,\chi_{\alpha-m+k+j}$$

и суммирование в последнем слагаемом ведется по тем $k=0,1,\dots,m$ и $j=0,1,\dots,N$, для которых $k+j>N$. Из (58) следует, что $h_N\in W_1^{N+1+\{\alpha\}-m}$. Правую часть равенства (67) с помощью леммы 8 представим в виде (60):

$$P\left(y,\ i\frac{\partial}{\partial y}\right)u=i^m\sum_{k=0}^{N}w_k(z(y))\,\chi_{\alpha-m+k}(s(y))+g_N,\tag{68}$$

где $g_N\in W_1^{N+1+\{\alpha\}-m}$ и

$$w_0|s=(R_0\varphi_0)|s,\tag{69}$$

$$w_{1+j}|s=\sum_{k=0}^{j+1}\sum_{l=0}^{\min(k,m)}\left[a^{\alpha-m}_{k,j}\frac{\partial^{j-k+1}}{\partial s^{j-k+1}}(R_l\varphi_{k-l})\right]\Big|_S,\tag{70}$$

где $0\leqslant j\leqslant N-1$ и $a^{\alpha-m}_{j+1,j}=1$. Теперь из леммы 9 следует эквивалентность соотношения (64) и равенств

$$w_k|s\equiv 0,\ 0\leqslant k\leqslant N.\tag{71}$$

Остается показать, что из соотношений (71) и того, что $\varphi_0 \neq 0$ почти всюду на S, следуют утверждения 1—3 теоремы, а из этих утверждений вытекают соотношения (71).

Если $\varphi_0 \neq 0$ почти всюду на S, то из соотношения (71) с $k=0$, (69) и (7) получаем, что

$$R_0|_S = H(y, \nabla s)|_S = 0. \tag{72}$$

Наоборот, из (72) следует соотношение (71) с $k=0$. Используя (72) и (70), соотношения (71) с $k>0$ можно переписать в следующем рекуррентном виде:

$$\left[R_1 \varphi_j + a_{j,j}^{\alpha-m} \frac{\partial}{\partial s}(R_0 \varphi_j)\right]\Big|_S =$$

$$= -\sum_{l=0}^{j-1} \sum_{i=0}^{\min(j+1-l,m)} \left[a_{l+i,j}^{\alpha-m} \frac{\partial^{j+1-l-i}}{\partial s^{j+1-l-i}} (R_i \varphi_l)\right]\Big|_S, \quad 0 \leqslant j \leqslant N-1. \tag{73}$$

Теперь остается показать, что уравнения (72), (73) эквивалентны утверждениям 1—3 теоремы. Но соотношение (72) означает, что поверхность S характеристична. Поскольку оператор P — гиперболический, то направление $\nu = (1, 0, \ldots, 0)$ не характеристично (см. гл. III, § 6) и, значит, $\nabla_x s(y) \neq 0$ при $y \in S$. Отсюда следует справедливость утверждения 2 а) теоремы 7. Тогда из теоремы 11 гл. III вытекает справедливость утверждения 2 теоремы 7. Наоборот, из утверждений 1, 2 теоремы, конечно, следует равенство (72). Остается показать, что уравнения (73) эквивалентны уравнениям (66). Для этого заметим, что, согласно замечанию к лемме 8, функции $\varphi_l, 0 \leqslant l \leqslant j-1$, в правой части равенства (73) могут быть восстановлены по $\hat{\varphi}_l$ и, значит, правая часть формулы (73) имеет тот же вид, что и в уравнении (66). Поскольку $a^{\alpha-m}{}_{jj} = \alpha - m + j + 1$, для функции R_0 справедливо соотношение (72), а оператор $Q_1 = iR_1$ имеет вид (8), где выражение в квадратных скобках обозначено через $h(y)$, то левая часть уравнения (73) равна

$$\Big\{\langle \nabla \varphi_j, \nabla_q H(y, \nabla s)\rangle -$$

$$- h(y) \varphi_j + (\alpha - m + j + 1) \left[\frac{\partial}{\partial s} H(y, \nabla s)\right] \varphi_j\Big\}\Big|_S =$$

$$= [\langle \nabla \varphi_j, \nabla_q H(y, \nabla s)\rangle + A_j(y) \varphi_j]|_S. \tag{74}$$

В последнем равенстве мы воспользовались соотношением (61). Из теоремы 11 гл. III следует, что $\nabla s(y) = F(\tau, \xi) q(\tau, \xi)$, где $y = y(\tau, \xi)$, $q = q(\tau, \xi)$ — семейство бихарактеристик системы (65), из лучей которого составлена поверхность S, а функция F определена в теореме 11 гл. III. Из однородности функции H и системы (65) получаем, что

$$\nabla_q H(y, \nabla s) = F \nabla_q H(y, q) = F y'_\tau.$$

Вместе с равенством (74) это показывает, что левая часть уравнений (73) совпадает с левой частью уравнений (66). ■

Замечание. Теорема 7 остается справедливой и ее доказательство не меняется, если вместо гиперболичности оператора P потребовать выполнения условий теоремы 10 гл. III.

Распад разрыва. Пусть $S_0=\{x : x\in R^n, s_0(x)=0\}$, где $s_0\in C^\infty(R^n)$, $\operatorname{Im} s_0\equiv 0$ и $\nabla s_0\neq 0$ при $s_0(x)=0$. Будем предполагать, что оператор $P(y, i\partial/\partial y)$ удовлетворяет условиям теоремы 10 гл. III, т. е.

$$H(0, x, \nu)\neq 0,\ x\in S_0,\ \nu=(1, 0, ..., 0) \tag{75}$$

и уравнение относительно λ

$$H(0, x, \lambda, \nabla s_0(x))=0 \tag{76}$$

при всех $x\in S_0$ имеет ровно M вещественных и притом простых корней. В частности, эти условия выполнены, если оператор P — гиперболический, при этом $M=m$.

Будем искать решение уравнения (64), которое вместе со своими производными по t до порядка $M-1$ имеет при $t=0$ заданные разрывы на поверхности S_0, т. е. будем искать функцию u, определенную в некоторой окрестности ω гиперплоскости $t=0$, являющуюся решением задачи

$$P\left(y,\ i\frac{\partial}{\partial y}\right)u\in W_{1,\,\mathrm{loc}}^{N+1+\{\alpha\}-m}, \tag{77}$$

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial t^j}\right|_{t=0}=\sum_{l=0}^{N}c_{lj}(x)\,\chi_{\alpha-j+l}(s_0(x))+f_j(x),\ 0\leqslant j\leqslant M-1, \tag{78}$$

где $c_{lj}\in C^\infty(R^n)$ — заданные функции, а f_j — произвольные функции такие, что $f_j\in W_{1,\,\mathrm{loc}}^{N+1+\{\alpha\}-j}$. Здесь $W_{1,\,\mathrm{loc}}^{r}$ — пространство функций в ω, принадлежащих $W^r{}_1$ в каждой ограниченной области $\hat\omega\subset\omega$.

В силу теорем 10, 11 гл. III в некоторой окрестности $\omega^1\subset R^{n+1}$ поверхности S_0 существует ровно M характеристических поверхностей S^ν, совпадающих с S_0 при $t=0$. Пусть эти поверхности задаются уравнениями $s^\nu(y)=0$, где $s^\nu\in C^\infty(\omega^1)$, $\operatorname{Im} s^\nu\equiv 0$, $\nabla s^\nu\neq 0$ при $y\in S^\nu$. Через u^ν обозначим построенные в теореме 7 решения уравнения (77) вида (60):

$$u^\nu=\sum_{l=0}^{N}\varphi_l^\nu(z(y))\,\chi_{\alpha+l}(s^\nu(y)).$$

Здесь функции $\varphi^\nu{}_j(z)$ удовлетворяют уравнениям переноса (66) и могут иметь любые начальные условия $\varphi_j^\nu|_{S_0}$ при $t=0$. Функции u^ν определены, вообще говоря, только при $y\in\omega^1$. Пусть $Q=\{y : y\in R^{n+1}, t=0, x\bar\in\omega^1\}$ и ω^2, ω^3 — две такие окрестности Q, что $\bar\omega^2\subset\omega^3$ и $\omega^3\cap S^\nu=\varnothing$, $1\leqslant\nu\leqslant M$. Очевидно, область $\omega=\omega^1\cup\omega^2$ содер-

жит гиперплоскость $t=0$. Пусть $h\in C^\infty(R^{n+1})$ — некоторая функция такая, что $h=1$ при $y\in\omega^1\setminus\omega^3$, $h=0$ в ω^2. Тогда функцию hu^ν можно считать определенной в ω, и она будет удовлетворять соотношению (77), поскольку она отличается от u^ν на функцию из $C^\infty(\omega)$.

Точно так же, как из теоремы 2 следовала теорема 3, теперь с помощью теоремы 7 и замечания к ней доказывается справедливость следующего утверждения.

Теорема 8. *Пусть выполнено условие* (75) *и уравнение* (76) *при всех* $x\in S_0$ *имеет ровно* M *вещественных и притом простых корней. Тогда функции* $\varphi_j^\nu(z)|_{S_0}$ *можно выбрать так, чтобы функция* $u=h\sum\limits_{\nu=1}^{M}u^\nu$ *была решением задачи* (77), (78).

Замечания. 1. Пусть оператор P таков, что начальная задача $Pu=f$ при $y\in\omega$, $\partial^j u/\partial t^j=f_j$ при $t=0$, $0\leqslant j\leqslant M-1$, имеет гладкие решения при достаточно гладких f, f_j (например, оператор P гиперболичен). Для таких операторов теорема 8 утверждает, что разрывы решений, имеющиеся при $t=0$ на поверхности S_0, распространяются при $t>0$ вдоль характеристических поверхностей, проходящих через S_0. Так как функции $\varphi^\nu{}_j$, характеризующие количественно величину этих разрывов, удовлетворяют уравнениям переноса, то, определив начальные данные на S_0 для этих функций, мы получаем возможность найти величину разрывов на каждой из характеристических поверхностей, проходящих через S_0. При этом рассуждения, приведенные выше при доказательстве теоремы 3, позволяют не только доказать существование решения задачи (77), (78), но и явно указать $\varphi_j^\nu|_{S_0}$.

2. Так же, как и утверждения предыдущего параграфа, теорему 8 можно было сформулировать и доказать в локальных терминах.

3. Теоремы 7, 8 легко обобщаются на случай систем уравнений (см. § 2).

Литературные указания, дополнения. Изложенный в § 2 метод отыскания быстро осциллирующих решений для обыкновенных дифференциальных уравнений был предложен Грином и Лиувиллем (1837). Для уравнений в частных производных этот метод впервые был применен П. Дебаем и Зоммерфельдом (1911), а для задач квантовой механики — Вентцелем, Крамерсом и Бриллюэном (метод ВКБ). На общие уравнения и системы этот метод был распространен Биркгофом [130] и Лаксом [138]. В изучении разрывных решений гиперболических уравнений основополагающими были работы Адамара. Изложение материала этой главы во многом следует монографии Куранта [63]. Там же имеются интересные приложения и примеры, в частности связь рассмотренных вопросов с вариационными принципами.

Решения уравнений, построенные в этой главе, были определены «в малом», т. е. в достаточно малой окрестности гиперплос-

кости $t=0$. Это было связано с тем, что соответствующие уравнения Гамильтона—Якоби имеют решения только в такой окрестности. Методы построения формальных асимптотических решений и разрывных решений «в большом», т. е. на любом конечном промежутке времени, будут обсуждаться в следующей главе.

Изложенные выше методы автоматически пригодны для отыскания формальных асимптотических (быстро осциллирующих) решений стационарных задач с малым параметром при старших производных (или большим — при младших членах), если область пространства R^n, в которой ищется решение, настолько мала, что связанное с задачей уравнение Гамильтона—Якоби разрешимо. Поскольку последнее условие выполняется крайне редко, то при отыскании формальных асимптотических решений стационарных задач приходится использовать технику построения таких решений «в большом» (см. гл. V, XI).

За пределами книги остались важные и трудные вопросы, связанные с перенесением предложенных выше методов на смешанные и краевые задачи. Изложение результатов по этой проблеме потребовало бы отдельной монографии. Чтобы ориентировать читателя, укажем на некоторые работы, при этом не претендуя на полноту приведенного списка. Задачам, в которых лучи системы Гамильтона не касаются границы области, посвящены работы [172, 131, 149, 184, 111]. В [115, 188, 8, 19, 147, 168] дано построение асимптотики решения задачи дифракции на выпуклом теле, в котором соответствующие лучи касаются границы области. Эти последние работы послужили отправной точкой для получения целого ряда результатов о структуре особенностей решения смешанных задач для гиперболических уравнений и о коротковолновых асимптотиках решений соответствующих краевых задач для эллиптических уравнений [18, 9—12, 20—22, 185, 157, 112]. Другие методы (типа энергетических оценок) для отыскания места расположения особенностей решения смешанных задач используются в работах [56, 158]. В [150, 152, 151, 159, 173, 174] получена коротковолновая асимптотика амплитуды рассеяния волн на ограниченном теле в однородной среде.

Глава V

КАНОНИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР В. П. МАСЛОВА

Канонический оператор Маслова позволяет построить формальное асимптотическое решение «в большом» для широкого класса дифференциальных уравнений. Этим методом решен целый ряд принципиальных задач. Но еще существеннее его универсальность и конструктивность, позволяющая написать с помощью одной и той же процедуры соответствующее формальное асимптотическое решение для самых разнообразных задач. Например, можно рассмотреть стационарное или нестационарное волновое уравнение для неоднородной (быть может, неизотропной) среды и с помощью канонического оператора написать коротковолновую асимптотику поля в целом в случае произвольно заданного падающего поля или для заданных источников. При этом поле описывается и в окрестности любых каустик. Можно написать коротковолновую асимптотику амплитуды рассеяния. Аналогичные вопросы решаются тем же самым методом и для уравнения Шредингера, систем Максвелла и теории упругости и для большого класса других уравнений и систем. Канонический оператор позволяет решить задачу о распространении разрывов решений, получить классификацию возможных каустик и полей в окрестности каустик, получить для самосопряженных операторов асимптотику серий собственных значений, связанных с инвариантными лагранжевыми многообразиями, и асимптотику соответствующих собственных функций, исследовать локальную разрешимость уравнений. Решение всех этих задач дается в терминах решений некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений — системы Гамильтона.

Мы изучим метод канонического оператора, решив подробно в § 1—4 одну конкретную задачу. В качестве такого примера мы возьмем стационарную задачу о рассеянии плоской волны в неоднородной среде. Для простоты и для того, чтобы иметь возможность использовать геометрические иллюстрации, мы ограничимся двумерным случаем. В конце § 4 без каких-либо пояснений будет повторен рецепт построения канонического оператора, дающего решение указанной задачи. В § 5 приводится еще один пример. Потом, в § 6, уже кратко обсуждается общая конструкция канонического оператора Маслова.

Для овладения методом канонического оператора Маслова необходимо знать метод стационарной фазы (§ 1, 2 гл. I), уметь

решать уравнения Гамильтона—Якоби (§ 2—4 гл. III) и быть знакомым с методом ВКБ «в малом» (§ 1, 2 гл. IV). Однако, поскольку мы старались придерживаться принципа максимальной формальной независимости глав (в тех случаях, когда это возможно и целесообразно), мы предпочли прибегнуть к некоторым небольшим повторам, чтобы, по крайней мере при первом чтении, с этой главой можно было ознакомиться почти независимо от всех предыдущих.

§ 1. Задача о рассеянии плоской волны в неоднородной среде

Постановка задачи. Пусть $x=(x_1, x_2)\in R^2$, ψ — решение уравнения Гельмгольца

$$[\Delta+k^2\varepsilon(x)]\psi(k, x)=0, \quad x\in R^2, \quad k>0. \tag{1}$$

Будем предполагать, что $\varepsilon\in C^\infty(R^2)$, $\varepsilon>0$ при всех $x\in R^n$ и $\varepsilon(x)=1$ при $|x|>a$.

Этому уравнению удовлетворяет амплитуда установившихся колебаний (механических, акустических, электромагнитных и т. д.). Функция ε характеризует среду, а константа k пропорциональна частоте. Нас будет интересовать асимптотика решения при $k\to\infty$, т. е. *коротковолновая* (или, что то же самое, *высокочастотная*) *асимптотика*. Отметим, что стационарное уравнение Шредингера также имеет вид (1). В квантовой механике указанная выше асимптотика называется *квазиклассической*.

Уравнение (1) при фиксированном $k>0$ имеет бесконечное множество решений. Интересующее нас единственное решение выделяется условиями на бесконечности. Будем искать решение ψ вида

$$\psi(k, x)=e^{ikx_1}+u(k, x), \tag{2}$$

где функция u удовлетворяет условиям излучения

$$u(k, x)=O(r^{-1/2}), \quad \frac{\partial u(k, x)}{\partial r}-iku(k, x)=o(r^{-1/2}), \quad r=|x|\to\infty. \tag{3}$$

Здесь функция $\exp(ikx_1)$ описывает идущую вдоль оси x_1 плоскую волну. Она удовлетворяет уравнению (1) при $\varepsilon\equiv1$. Функция u описывает волну, возникающую в результате рассеяния на неоднородностях среды ($u\equiv0$ при $\varepsilon\equiv1$). Хорошо известно (подробнее об этом будет идти речь в гл. VII), что уравнение (1) имеет и притом единственное решение, удовлетворяющее условиям (2), (3). Именно его мы и будем обозначать через ψ.

Формальным асимптотическим решением уравнения (1) называется функция ψ_N, удовлетворяющая уравнению

$$[\Delta+k^2\varepsilon(x)]\psi_N(k, x)=O(k^{-N}), \quad k\to\infty, \tag{4}$$

при некотором достаточно большом $N>0$. Обычно оно строится в ограниченной области $|x|<b$. Задача получения асимптотики точного решения распадается на две, часто совершенно не связанных между собой, задачи: построение формального асимптотического решения и обоснование, т. е. оценка разности между построенным формальным асимптотическим решением и точным решением задачи. В нестационарных задачах имеется конечная скорость распространения возмущений и энергетические оценки, из которых следует малость решения, если малы правые части задачи. Поэтому в этих задачах обоснование не представляет трудности, и формальное асимптотическое решение является асимптотикой точного решения. Гораздо хуже обстоит дело в стационарных задачах, и в частности в случае уравнения (4). Так как ψ_N строится при $|x|<b$ без каких-либо граничных условий, то таких решений уравнения (4) бесконечное множество и построенная наугад функция ψ_N не будет близка к u. Даже если ψ_N удовлетворяет уравнению (4) во всем пространстве и удовлетворяет условиям (2), (3), этого недостаточно, чтобы оценить разность $\psi(k, x)-\psi_N(k, x)$. Для этого необходимо еще иметь подходящие оценки обратного оператора $[\Delta+k^2\varepsilon(x)]^{-1}$, которые можно надеяться получить только, если правая часть в (4) достаточно быстро убывает при $r\to\infty$. Таким образом, вопросы обоснования в данном случае приводят к необходимости получения равномерных по спектральному параметру k оценок резольвенты оператора в точках непрерывного спектра и к асимптотическому исследованию решений одновременно по двум параметрам $k\to\infty$, $r\to\infty$. Эти вопросы достаточно трудны и будут обсуждаться в гл. X, XI. Здесь же только будет с помощью канонического оператора Маслова построено одно формальное асимптотическое решение, которое, как потом окажется, на самом деле является асимптотикой точного решения.

Дебаевская процедура. Будем искать формальное асимптотическое решение задачи (4) в виде

$$\psi_N(k, x)=e^{ikS(x)}\sum_{j=0}^{N}(ik)^{-j}a_j(x),\ \operatorname{Im} S\equiv 0. \tag{5}$$

Такие формальные асимптотические решения были построены в § 2 гл. IV для довольно общих уравнений. Подставим выражение (5) в уравнение (4), вынесем из каждого слагаемого в левой части за скобку экспоненту и соберем члены при одинаковых степенях (ik). Для того чтобы функция (5) удовлетворяла уравнению (4), необходимо, чтобы коэффициенты при $(ik)^l$, $l>-N$, обратились в нуль. Максимальной степенью (ik), которая появляется при подстановке (5) в (4), является $(ik)^2$. Приравнивая коэффициент при ней нулю, получаем

$$[|\nabla S(x)|^2-\varepsilon(x)]a_0(x)=0.$$

Так как мы ищем решение в виде (5) с $a_0(x)\not\equiv 0$, то положим
$$|\nabla S(x)|^2-\varepsilon(x)=0. \tag{6}$$
Это уравнение называется *уравнением эйконала* (а в квантовой механике оно же называется *уравнением Гамильтона—Якоби*). Приравняв нулю коэффициент при (ik), получим уравнение
$$2<\nabla S(x),\nabla a_0(x)>+(\Delta S(x))a_0(x)=0. \tag{7}$$
Здесь и ниже скобками $<u,v>$ обозначается скалярное произведение векторов u и v. Далее, приравняв нулю коэффициенты при $(ik)^{-j+1}$, $1<j<N$, получим
$$2<\nabla S(x),\nabla a_j(x)>+(\Delta S(x))a_j(x)+\Delta a_{j-1}(x)=0. \tag{8}$$
Уравнения (7), (8) называются *уравнениями переноса*. Позже они будут переписаны в другом, более стандартном виде.

Можно взять любое решение S уравнения эйконала, найти из (7) какое-нибудь решение a_0 и, решив последовательно уравнения (8), определить a_j, $1<j\leqslant N$. При так определенных $S(x)$ и $a_j(x)$, $0\leqslant j\leqslant N$, функция (5) будет решением уравнения (4). Мы построили большой класс формальных асимптотических решений. Произвол при построении этих решений заключается в том, что мы пока не задали начальных данных для решений уравнений (6)—(8). Эти начальные данные диктуются постановкой задачи (2), (3). Зафиксируем какое-нибудь $b\geqslant a$. Потребуем, чтобы $\psi_N(k,x)\approx\exp(ikx_1)$ в окрестности прямой $P:x_1=-b$. (Напомним, что $\varepsilon(x)\equiv 1$ вне круга $|x|<a$; рис. 1). Точно это означает следующее. Пусть

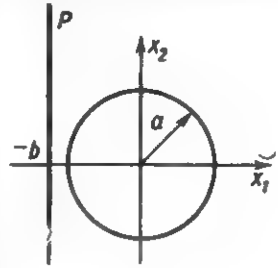

Рис. 1

$$S(x)|_{x_1=-b}=-b,\quad S'_{x_1}(x)|_{x_1=-b}=1; \tag{9}$$
$$a_0(x)|_{x_1=-b}=1,\quad a_j(x)|_{x_1=-b}=0,\quad j>0. \tag{10}$$
Уравнения (6)—(8) с условиями (9), (10) имеют и притом единственные решения в некоторой окрестности прямой P (пока лучи не пересекаются). Напомним (без доказательства) как решаются эти уравнения. Доказательство того, что приведенные ниже формулы дают решение задачи (6), (9), содержится в § 4 гл. III.

Решение уравнения эйконала. Для того чтобы решить уравнение (6) с начальными условиями (9), необходимо сначала построить систему лучей, выпущенных из прямой P в направлении оси x_1. Для этого надо выписать систему Гамильтона. Система Гамильтона — это система обыкновенных дифференциальных уравнений в фазовом пространстве (x,p) (в данном случае — четырехмерном). В общей ситуации для произвольного гамильтониана $H=H(x,p)$ эта система имеет вид
$$x'_s=H'_p(x,p),\quad p'_s=-H'_x(x,p). \tag{11}$$

В нашем случае $H(x, p)=|p|^2-\varepsilon(x)$ и система Гамильтона имеет вид

$$x'_s=2p,\ p'_s=\nabla\varepsilon(x). \tag{12}$$

Начальные данные (9) диктуют следующие начальные условия для системы Гамильтона:

$$x|_{s=0}=(-b, \xi),\ p|_{s=0}=(1, 0);\ -\infty<\xi<\infty. \tag{13}$$

Фазовые кривые системы (12) (в фазовом пространстве $R^4_{x,p}$) с начальными условиями (13) называются *бихарактеристиками*, а их проекции в пространство R^2_x — *лучами*.

Лемма 1. *Вдоль бихарактеристик системы* (12), (13) $|p|^2=\varepsilon(x)$.

Доказательство. Возьмем производную от $H=|p|^2-\varepsilon(x)$ вдоль траекторий системы (12): $\partial H/\partial s=\langle 2p, p'_s\rangle-\langle\nabla\varepsilon(x), x'_s\rangle$. Подставив сюда вместо производных их выражения из (12), получим $\partial H/\partial s=0$. А так как $H=0$ при $s=0$, то это доказывает лемму 1. ■

Лемма 2. *Решение задачи* (12), (13)

$$x=x(s, \xi),\ p=p(s, \xi),\ -\infty<\xi<\infty \tag{14}$$

определено при всех $s\in R'$, функции $x(s, \xi)$, $p(s, \xi)$ бесконечно дифференцируемы по s и ξ. Бихарактеристики, отвечающие разным значениям ξ, не пересекаются.

Эта лемма является следствием стандартной теоремы существования, единственности и дифференцируемости по начальным данным для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Требует пояснения только существование решения для всех $s\geqslant 0$, т. е. надо показать, что решение не может уйти на бесконечность на конечном промежутке $0\leqslant s\leqslant s_0$. Но из леммы 1 следует, что вдоль решений системы (12), (13) $|p|<C$, а тогда из первой половины задачи (12), (13) получаем, что $|x_i|\leqslant Cs+\max(|\xi|, b)$. ■

Что касается лучей задачи (12), (13), то они уже могут пересекаться. Типичная картина лучей изображена на рис. 2, где начиная с некоторого момента лучи пересекаются. Их огибающая называется каустикой. Если же добавить к чертежу оси p и изобразить бихарактеристики, то, как это было уже получено выше, эти бихарактеристики пересекаться не будут.

Обозначим через J модуль якобиана:

$$J=|D(x)/D(s, \xi)|, \tag{15}$$

где $x=x(s, \xi)$ определено в (14). Этот якобиан характеризует плотность лучей в лучевой трубке. В некоторой окрестности прямой P, пока лучи задачи (12), (13) находятся в области, где $\nabla\varepsilon(x)=0$, решения задачи (12), (13) имеют вид

$$p=(1, 0),\ x=(-b+2s, \xi), \tag{16}$$

и, значит, там $J\equiv 2\neq 0$. Через ω обозначим максимальную область в R^2_x, содержащую прямую P, в которой $J\neq 0$. Так как $J\neq 0$ в ω, то точкам ω взаимно однозначно соответствуют параметры s, ξ, и, значит, в каждую точку $x\in\omega$ приходит и притом ровно один луч задачи (12), (13). Пусть $x^0=(-b,\xi)\in P$ — точка прямой P, из которой этот луч выходит, l — отрезок луча, соединяющий x^0 и x, L — соответствующий отрезок бихарактеристики, проектирующийся на l (рис. 3).

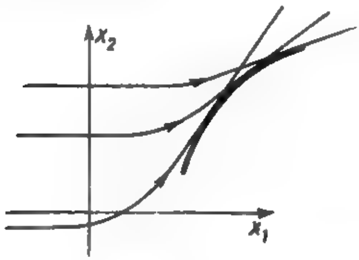

Рис. 2

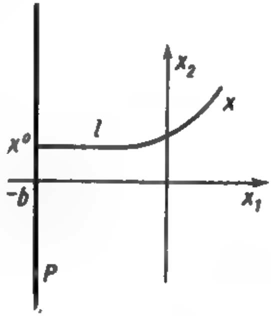

Рис. 3

Гладкое решение S уравнения эйконала существует только в ω и определяется с помощью интегрирования вдоль бихарактеристик системы Гамильтона. В общей ситуации если S — решение уравнения $H(x,\nabla S(x))=0$, то для определения S надо проинтегрировать уравнение $S'_s=\langle p, H'_p\rangle$. Таким образом,

$$S(x)=S(x^0)+\int_L \langle p, H'_p\rangle\, ds = S(x^0)+\int_L \langle p, dx\rangle, \tag{17}$$

где p, x имеют вид (14) и описывают бихарактеристику L, а последнее равенство следует из (11).

В нашей конкретной ситуации $S(x^0)=-b$, и кроме формулы (17) для определения $S(x)$ можно пользоваться любым из следующих равенств:

$$S(x)=-b+2\int_L \varepsilon(x)\,ds=-b+\int_l \sqrt{\varepsilon(x)}\,dl. \tag{18}$$

Действительно, в нашем случае $\langle p, H'_p\rangle=2|p|^2$, а так как $|p|^2=\varepsilon(x)$ на L (лемма 1), то из (17) получаем первое из равенств (18). Далее, из (12) имеем $dl=|dx|=2|p|ds$. Вместе с условием $|p|^2=\varepsilon(x)$ на L это дает второе из равенств (18).

Решение уравнений переноса. Чуть ниже и в следующем параграфе нам нужно будет воспользоваться теоремой Лиувилля. Напомним ее [5].

Пусть $x'_s=v(x)$; $x, v(x)\in R^n$, — автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений и $x=x(s,x^0)$ — решение этой системы с начальными условиями $x|_{s=0}=x^0$. Теорема Лиу-

вилля утверждает, что модуль якобиана $J=|D(x)/D(x_0)|$ (равный коэффициенту изменения фазового объема при сдвиге вдоль траекторий системы) удовлетворяет на траекториях системы следующему соотношению $(\ln J)'_s=\operatorname{div} v(x)$.

Решим уравнение переноса (7). Второе из равенств (17) дает нам: $dS=\langle p, dx\rangle$, т. е. $\nabla S(x)=p$, где $(x,p)\in L$. Аккуратное доказательство этого утверждения содержится в теореме 6 гл. III. Вместе с (12) это позволяет переписать первое слагаемое в (7) в виде

$$2\langle \nabla S(x), \nabla a_0(x)\rangle = \langle x'_s, \quad \nabla a_0(x)\rangle = \frac{d}{ds} a_0(x).$$

Таким образом, уравнение (7) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение на L:

$$\frac{d}{ds} a_0 + [\Delta S(x(s,\xi))]a_0 = 0. \tag{19}$$

Аналогично, уравнения (8) имеют вид

$$\frac{d}{ds} a_j + [\Delta S(x(s,\xi))]a_j = -\Delta a_{j-1}, \quad j>0. \tag{19'}$$

Далее, так как $\nabla S(x)=p$, то после решения уравнения эйконала и определения функции S можно переписать первую половину системы (12) в виде $x'_s=2\nabla S(x)$. Из теоремы Лиувилля, примененной к этой системе, получаем, что $\Delta S(x)=2^{-1}(\ln\tilde{J})'_s$. Из (16) следует, что сдвиг на $\alpha<0$ вдоль траекторий системы (12), (13) эквивалентен переходу от начальных данных (13) к начальным данным $x|_{s=0}=(\eta,\xi)$, $p|_{s=0}=(1,0)$, где $\eta=-b+2\alpha$, т. е.

$$x(s,x_0)=x(s+\alpha,\xi) \text{ при } x_0=(-b+2\alpha,\xi),\ \alpha<0. \tag{20}$$

Значит, $\tilde{J}=J/2$ и $\Delta S(x)=2^{-1}(\ln J)'_s$. Таким образом, уравнения (19), (19′) можно переписать еще так:

$$\frac{1}{\sqrt{J}}(\sqrt{J}\,a_0)'_s=0,\quad \frac{1}{\sqrt{J}}(\sqrt{J}\,a_j)'_s=-\Delta a_{j-1},\quad j>0. \tag{21}$$

Условия (10) дают нам начальные данные для этих уравнений:

$$a_0|_{s=0}=1;\ a_j|_{s=0}=0,\ j>0. \tag{22}$$

Из (21), (22) однозначно находятся функции a_j. В частности, так как $J|_{s=0}=2$ (см. (16)), то из (21), (22) получаем, что $a_0(x)=\sqrt{2/J}$.

Еще раз подчеркнем, что при определении фазы $S(x)$ и коэффициентов $a_j(x)$ существенно был использован тот факт, что в каждую точку области ω приходит и притом только один луч и $J\neq 0$ в ω. Действительно, распишем подробнее, например, первое

из равенств (17):

$$S = -b + \int_0^s \langle p(s, \xi),\ H_p'(x(s, \xi)\ p(s, \xi))\rangle\, ds.$$

Очевидно, так определенная функция S является гладкой функцией (s, ξ), а не x. То же следует и из других формул (17), (18). Из (21), (22) следует, что и функции a_j являются гладкими функциями (s, ξ). И только в ω, где $J \neq 0$, можно разрешить уравнения (14) относительно (s, ξ), выразить s и ξ гладко через x и получить гладкие функции $S = S(x)$, $a_j = a_j(x)$. Формула для a_0 показывает, что решение (5) на границе области ω обязательно имеет особенности.

Для того чтобы уравнения переноса (19) имели более простой вид, удобно перейти от функций a_j к $\varphi_j = \sqrt{J}\, a_j$. Тогда вместо (5) будем иметь

$$\psi_N(k, x) = \frac{1}{\sqrt{J}} e^{ikS(x)} \sum_{j=0}^{N} (ik)^{-j} \varphi_j(x) \tag{23}$$

и вместо (21), (22) — формулы

$$\frac{d}{ds}\varphi_0 = 0;\ \ \frac{d}{ds}\varphi_j = -\sqrt{J}\,\Delta\left(\frac{\varphi_{j-1}}{\sqrt{J}}\right),\ \ j > 0; \tag{24}$$

$$\varphi_0|_{s=0} = \sqrt{J}\, a_0|_{s=0} = \sqrt{2};\ \ \varphi_j|_{s=0} = 0,\ j > 0; \tag{25}$$

В частности, отсюда следует, что $\varphi_0 \equiv \sqrt{2}$.

Резюме. В области ω существует формальное асимптотическое решение ψ_N уравнения (4), равное $\exp(ikx_1)$ при $x_1 = -b$. Это решение имеет вид (23). Для нахождения функций S и φ_j надо решить систему обыкновенных уравнений (12) с начальными условиями (13). После этого функция S определяется по формулам (17) или (18), $\varphi_0 \equiv \sqrt{2}$, а φ_j, $j > 0$, находятся из уравнений и начальных условий (24), (25). В частности, в ω

$$\psi_N(k, x) = \sqrt{\frac{2}{J}}\, e^{ikS(x)} + O(k^{-1}),\quad S(x) = -b + \int_L \langle p, dx\rangle.$$

Основная идея метода канонического оператора Маслова заключается в следующем. В окрестности каустик, где формальное асимптотическое решение в виде быстро осциллирующей функции (23) не существует, будем искать его в виде интегралов от быстро осциллирующих функций. А именно, в окрестности каустик перейдем от координатного представления поля $\psi(k, x)$ к импульсному $\tilde{\psi}(k, p)$, т. е. сделаем обратное преобразование Фурье (точнее, обратное k — преобразование Фурье). Формальное асимптотическое решение в уравнении для $\tilde{\psi}(k, p)$ найдем с помощью дебаевской процедуры. Затем перейдем обратно к координатному пред-

ставлению. Итак, $\varphi_N(k, x)$ иногда будет представляться в виде преобразования Фурье от быстро осциллирующей функции. Эти асимптотические формулы пишутся так, чтобы в пересечении разных областей они в главном давали одну и ту же функцию. Тогда их можно с помощью разбиения единицы срастить и написать формальное асимптотическое решение в целом (в большой области). Подробнее об этом будет идти речь в § 2—4.

§ 2. Лагранжево многообразие

Построение лагранжева многообразия Λ. Это многообразие является основным геометрическим объектом, участвующим в построении канонического оператора Маслова. В нашем конкретном примере Λ — это гладкое двумерное многообразие в фазовом пространстве $R^4_{x,p}$, сотканное из бихарактеристик задачи (12), (13), т. е. в качестве глобальных координат на Λ можно взять (s, ξ), и определяется Λ формулой (14).

Лемма 3. *Множество Λ — это гладкое двумерное односвязное многообразие.*

Доказательство. Так как начальное многообразие односвязно и $s \in R^1$, то достаточно показать, что матрица

$$A = \begin{pmatrix} x'_{1_s}, & x'_{2_s}, & p'_{1_s}, & p'_{2_s} \\ x'_{1_\xi}, & x'_{2_\xi}, & p'_{1_\xi}, & p'_{2_\xi} \end{pmatrix}$$

имеет ранг два. Для этого рассмотрим решение системы (12) с начальными условиями $x|_{s=0}=x^0$, $p|_{s=0}=p^0$. Пусть D — матрица Якоби: $D = \begin{pmatrix} x'_{x^0}, & p'_{x^0} \\ x'_{p^0}, & p'_{p^0} \end{pmatrix}$. Применив теорему Лиувилля (см. § 1) к системе (12), получим $|\det D| \equiv 1$. Значит, если $\tilde{D} = (x'_{x^0}, p'_{x^0})$ — матрица, составленная из первых двух строчек матрицы D, то $\operatorname{rank} \tilde{D} = 2$. Но из (20) следует, что матрица A отличается от $\tilde{D}$ только множителем $^1/_2$ в первой строчке. ■

Общее определение *лагранжева многообразия* таково: это гладкое многообразие в фазовом пространстве $\mathrm{R}^{2n}_{x,p}$, для любых двух точек λ_1, λ_2 которого интеграл $\int\limits_C \langle p, dx\rangle$ не зависит от выбора (локально) пути C, соединяющего эти точки. Лагранжевы многообразия могут иметь размерность не выше n (нам это утверждение не понадобится), и особенно интересны для приложений лагранжевы многообразия максимальной размерности n. Покажем лагранжевость Λ. Из определения следует, что любое одномерное многообразие в $R^{2n}_{x,p}$ является лагранжевым. В частности, лагранжевым является одномерное многообразие $\Lambda_1 \subset R^4_{x,p}$, представляющее собой множество начальных данных задачи (13): $x = (-b, \xi)$, $p = (1, 0)$, $-\infty < \xi < \infty$. Одно из важнейших утверж-

дений классической механики состоит в следующем: если M — некоторое лагранжево многообразие размерности $n-1$, бихарактеристики некоторой системы Гамильтона трансверсальны M и g^s — сдвиг в $R^{2n}_{x,p}$ на величину s вдоль этих бихарактеристик, то многообразие $\bigcup\limits_{\alpha<s<\beta} g^s M$, заметаемое бихарактеристиками системы Гамильтона, выпущенными из M, также является лагранжевым (размерности n). Отсюда следует, что указанное выше многообразие Λ действительно является лагранжевым.

Локальные координаты на Λ. Пусть $M\subset R^{2n}_{x,p}$ — это n-мерное лагранжево многообразие. *Точка* $\lambda\in M$ называется *неособой*, если некоторая ее окрестность на M диффеоморфно проектируется в $R^n{}_x$, и *особой* — в противном случае. Множество всех особых точек называется *циклом особенностей* и обозначается $\Sigma(M)$. Его проекция в $R^n{}_x$ образует *каустическое множество.*

Разобьем множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ на два непересекающихся подмножества $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ и $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_{n-s})$. Через x_α, p_α, x_β, p_β обозначим векторы из соответствующих компонент векторов x и p, $|\alpha|=s$, $|\beta|=n-s$. Плоскости (n-мерные) вида (x_α, p_β) в $R^{2n}{}_{x,p}$ называются *координатными лагранжевыми плоскостями.* Нам понадобится только одно свойство [78] лагранжевых многообразий (кроме свойства, данного в определении): каждая плоскость, касательная к M, однозначно проектируется на одну из координатных лагранжевых плоскостей. Другими словами, в некоторой окрестности любой точки $\lambda\in M$ в качестве локальных координат можно взять набор (x_α, p_β), так что в этой окрестности многообразие M будет задаваться уравнениями

$$x_\beta=x_\beta(x_\alpha,p_\beta),\quad p_\alpha= p_\alpha(x_\alpha, p_\beta) \tag{26}$$

и якобиан $D(x_\alpha, p_\beta)/D(s, \xi)$ перехода от локальных координат (x_α, p_β) к глобальным $(s, \xi)\in R^n$ (если они есть) отличен от нуля в указанной окрестности.

В рассматриваемом примере при $n=2$ есть только четыре координатных лагранжевых плоскости: (x_1, x_2), (p_1, p_2), (x_1, p_2), (x_2, p_1), и одну из этих пар можно взять в качестве локальных координат на Λ. Мы будем продолжать записывать это в виде (26). Может случиться так, что в качестве локальных координат можно взять только одну из указанных пар переменных. Возможны ситуации, когда касательная плоскость к лагранжеву многообразию однозначно проектируется на несколько из координатных лагранжевых плоскостей или на все, и тогда локальные координаты выбираются неоднозначно. Если точка $\lambda\in\Lambda$ не принадлежит $\Sigma(\Lambda)$, то в качестве локальных координат в окрестности λ можно взять (x_1, x_2). Если $\lambda\in\Sigma(\Lambda)$, то этого сделать нельзя, но тогда осуществляется по крайней мере одна из трех оставшихся возможностей.

Эти утверждения можно графически проиллюстрировать при $n=1$. Тогда фазовое пространство будет двумерным $R^2{}_{x,p}$ (рис. 4),

лагранжево многообразие Λ будет представлять собой кривую на плоскости $R^2_{x,p}$. Для каждой точки этой кривой существует окрестность, в которой Λ диффеоморфно проектируется либо на ось x, либо на ось p, либо на обе эти оси. Если вернуться к нашей задаче, то, как было выяснено в § 1, к начальной кривой P примыкает часть Λ' многообразия Λ, диффеоморфно проектирующаяся на область ω плоскости (x_1, x_2). В точках Λ' якобиан (15) отличен от нуля. (На рис. 4 многообразие Λ' ограничено точкой A', а область ω представляет собой луч $(-\infty, A)$). На границе Λ' этот якобиан равен нулю, и Λ не проектируется диффеоморфно

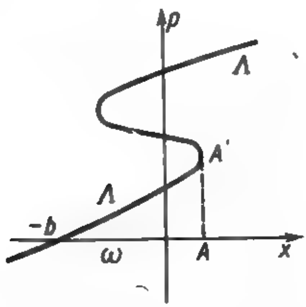

Рис. 4

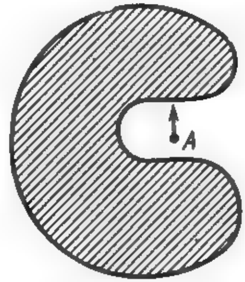

Рис. 5

на плоскость (x_1, x_2). В силу сказанного выше точки границы многообразия Λ' имеют окрестности, в которых Λ диффеоморфно проектируется на одну из трех оставшихся лагранжевых плоскостей.

Всюду ниже без дополнительных напоминаний будет предполагаться выполненным следующее

Условие D. Выпущенные из произвольной точки фазового пространства бихарактеристики системы Гамильтона (12) уходят на бесконечность при $s \to \infty$.

Смысл этого условия заключается в том, что неоднородности среды не имеют характера «ловушек». Такие «ловушки» легко представить себе в случае однородной среды ($\varepsilon(x) \equiv 1$) при наличии препятствий (задача во внешней области). На рис. 5 изображено препятствие такое, что если из точки A выпустить луч системы Гамильтона в направлении стрелки, то этот луч не уйдет на бесконечность. Аналогичного характера ловушки могут существовать при отсутствии препятствий в случае неоднородной среды.

Мы построим формальное асимптотическое решение уравнения в круге $|x| < b$, $b \geqslant a$. Через Λ_b обозначим компактную часть Λ, определяемую условиями $|\xi| \leqslant b+1$, $|s| \leqslant s_0$ с таким s_0, чтобы проекция $\Lambda \setminus \Lambda_b$ на плоскость (x_1, x_2) лежала вне круга $|x| \leqslant b+1$. Указанное s_0 существует. Действительно, при $|\xi| > b+1 > a$ траектории системы Гамильтона (12) имеют вид пря-

мых (16), т. е. в круг $|x|\leqslant b+1$ могут попасть только лучи, выпущенные из точек, для которых $|\xi|\leqslant b+1$. Но из условия D следует существование такого s_0, что при $|s|>s_0$ эти лучи покинут круг $|x|\leqslant b+1$, так что при этом s_0 действительно над кругом $|x|\leqslant b+1$ не будет точек многообразия $\Lambda\setminus\Lambda_b$.

Для каждой точки $\lambda\in\Lambda_b$ существует связная окрестность на Λ (карта), в замыкании которой Λ в каких-то локальных координатах имеет вид (26). Так как Λ_b компактно, то из этих карт можно выбрать конечное покрытие Λ_b. Обозначим соответствующие карты через $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$, локальные координаты в Ω_j — через (x_α, p_β), $\alpha=\alpha(j)$ (и, значит, $\beta=\beta(j)$). Проекцию карты Ω_j на плоскость (x_α, p_β), $\alpha=\alpha(j)$, обозначим через U_j. Таким образом, $\Lambda_b\subset\bigcup\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\Omega_j$, в каждой карте Ω_j многообразие Λ имеет вид (26) и

$$J_j=\left|\frac{D(x_\alpha, p_\beta)}{D(s,\xi)}\right|\neq 0,\ (x_\alpha, p_\beta)\in\overline{U}_j,\ \alpha=\alpha(j). \tag{27}$$

Очевидно, покрытие компакта Λ_b картами Ω_j строится неоднозначно. Кроме того, в картах Ω_j можно неоднозначно выбирать локальные координаты. В дальнейшем зафиксируем какое-нибудь одно покрытие Λ_b картами Ω_j и выберем локальные координаты (x_α, p_β) в Ω_j произвольно (но так, что выполнено (27)).

Производящая функция. *Производящая функция* определяется отдельно для каждой из карт Ω_j как функция $S_j=S_j(x_\alpha, p_\beta)$, $\alpha=\alpha(j)$, локальных координат $(x_\alpha, p_\beta)\in U_j$, такая, что

$$S'_{j_{x_\alpha}}(x_\alpha, p_\beta)=p_\alpha(x_\alpha, p_\beta),\ S'_{j_{p_\beta}}(x_\alpha, p_\beta)=-x_\beta(x_\alpha, p_\beta),\ (x_\alpha, p_\beta)\in U_j, \tag{28}$$

где $p_\alpha(x_\alpha, p_\beta)$ и $x_\beta(x_\alpha, p_\beta)$ — правые части в (26), т. е. уравнения

$$p_\alpha=S'_{j_{x_\alpha}}(x_\alpha, p_\beta),\quad x_\beta=-S'_{j_{p_\beta}}(x_\alpha, p_\beta) \tag{29}$$

определяют Λ в карте Ω_j. Для нахождения S_j прежде всего построим глобально на всем Λ бесконечно дифференцируемую функцию $S=S(s,\xi)$ с помощью любой из формул (17) или (18), например:

$$S(s,\xi)=-b+\int\limits_L\langle p, dx\rangle=-b+\int\limits_L\langle p(s,\xi),\ dx(s,\xi)\rangle. \tag{30}$$

В § 1 было показано, что если рассмотреть эту функцию $S=S(s,\xi)$ на части Λ' многообразия Λ, диффеоморфно проектирующейся на область ω плоскости (x_1, x_2), и перейти от координат (s,ξ) к координатам (x_1, x_2), то получающаяся при этом функция $S(x)=S(s(x),\xi(x))$ будет решением уравнения эйконала. Мы не можем продолжить с помощью этой процедуры гладко функцию $S(x)$ за пределы области ω, так как на границе ω замена $(s,\xi)\to$

$\to(x_1,x_2)$ теряет свою гладкость, но сама функция $S=S(s,\xi)$ с помощью формулы (30) определена бесконечно дифференцируемым образом на всем Λ.

Глобально определенную на всем Λ функцию (30) можно записать в каждой из карт Ω_j в локальных координатах (x_α, p_β), $\alpha=\alpha(j)$. Положим

$$S_j(x_\alpha, p_\beta) = S(s(x_\alpha, p_\beta),\ \xi(x_\alpha, p_\beta)) - \langle x_\beta(x_\alpha, p_\beta), p_\beta\rangle,\ (x_\alpha, p_\beta)\in U_j. \tag{31}$$

Лемма 4. *Функция* (31) *является производящей функцией.*

Доказательство. Непосредственно из определения (30) и равенства $\int\limits_C \langle p, dx\rangle=0$, имеющего место для любого замкнутого контура $C\subset\Lambda$ (это вытекает из односвязности и лагранжевости Λ), следует, что $dS=\langle p,\ dx\rangle$. Распишем полученное соотношение подробнее с учетом того, что независимыми переменными в карте Ω_j являются $(x_\alpha,\ p_\beta)$:

$$dS=\langle p, dx\rangle=\langle p_\alpha(x_\alpha, p_\beta), dx_\alpha\rangle+\langle p_\beta, dx_\beta(x_\alpha,\ p_\beta)\rangle.$$

Тогда из (31) получаем

$$dS_j(x_\alpha, p_\beta)=\langle p_\alpha(x_\alpha, p_\beta), dx_\alpha\rangle-\langle x_\beta(x_\alpha, p_\beta),\ dp_\beta\rangle.$$

Но это и означает справедливость формул (28). ■

Разбиение единицы на Λ_b. Разбиением единицы на Λ_b, подчиненным покрытию $\{\Omega_j\}$, $1\le j\le m$, называется набор $\{e_j(s,\xi)\}$ функций таких, что $e_j\subset C^\infty_0(\Omega_j)$ и $\sum\limits_{j=1}^{m} e_j\equiv 1$ на Λ_b. Такой набор можно явно построить (лемма 2 гл. I). В дальнейшем мы раз и навсегда зафиксируем какое-нибудь разбиение единицы на Λ_b, подчиненное покрытию $\{\Omega_j\}$.

§ 3. Предканонический оператор

Предканонический оператор $K(\Omega_j)$ строится отдельно для каждой карты Ω_j многообразия Λ. Он действует на функциях $\varphi\in C^\infty_0(\Omega_j)$ — переводит их в функции $u=K(\Omega_j)\varphi\in C^\infty(R^2_x)$ и определяется следующими формулами.

1°. Пусть карта Ω_j неособая, т. е. Ω_j хорошо проектируется в R^2_x, и в качестве локальных координат в Ω_j взяты (x_1, x_2). Тогда якобиан (27) совпадает с (15), функция $\varphi\in C^\infty_0(\Omega_j)$ может быть записана в локальных координатах $\varphi(x)=\varphi(s(x),\xi(x))$, а оператор $K(\Omega_j)$ действует на φ как умножение $\varphi(x)$ на $J_j^{-1/2}\exp(ikS_j(x))$, где $S_j(x)$ — производящая функция, построенная в § 2:

$$u(k, x)=K(\Omega_j)\varphi=J_j^{-1/2}e^{ikS_j(x)}\varphi(x),\ J_j=\left|\frac{D(x)}{D(s,\xi)}\right|,\ x\in U_j. \tag{32}$$

2°. Пусть в качестве локальных координат в Ω_j взяты переменные $p=(p_1, p_2)$. Тогда функция $\varphi \in C^\infty_0(\Omega_j)$ может быть записана в этих координатах: $\varphi(p)=\varphi(s(p), \xi(p))$ и

$$u(k, x) = K(\Omega_j)\varphi = \left(\frac{k}{-2\pi i}\right)^{\frac{n}{2}} \int\limits_{R^2_p} J_j^{-\frac{1}{2}} e^{ik[S_j(p)+\langle x, p\rangle]} \varphi(p)\, dp,$$

$$\sqrt{i} = e^{i\frac{\pi}{4}}, \tag{33}$$

где J_j дается формулой (27), $S_j(p)$ — производящая функция, построенная в § 2, $n=2$ (мы написали $n/2$, а не 1, чтобы был ясен вид формулы при любых n). Таким образом, в этом случае предканонический оператор представляет собой k-преобразование Фурье от быстро осциллирующей функции.

3°. Аналогичный вид имеет предканонический оператор, если в качестве локальных координат в Ω_j взят произвольный набор (x_α, p_β). В этом случае преобразование Фурье берется по части переменных:

$$u(k, x) = K(\Omega_j)\varphi =$$

$$= \left(\frac{k}{-2\pi i}\right)^{\frac{|\beta|}{2}} \int\limits_{R^{|\beta|}_{p_\beta}} J_j^{-\frac{1}{2}} e^{ik[S_j(x_\alpha, p_\beta)+\langle x_\beta, p_\beta\rangle]} \varphi(x_\alpha, p_\beta)\, dp_\beta. \tag{34}$$

Обозначим через $\|v\|$ норму функции v в $L_2(|x|<b)$: $\|v\| = (\int\limits_{|x|<b} |v(x)|^2 dx)^{1/2}$. Также — $\|\varphi\|$ — будем обозначать норму в L_2 функции $\varphi \in C^\infty_0(\Omega_j)$, вычисленную в локальных координатах (x_α, p_β).

Лемма 5. *Для любой функции* $\varphi \in C^\infty_0(\Omega_j)$

$$\|K(\Omega_j)\varphi\| \leqslant C\|\varphi\|,$$

где константа не зависит от k.

Доказательство. В случае (32) утверждение леммы очевидно. В случае (33) имеем $K(\Omega_j)\varphi = Ck^{n/2}\tilde{\psi}(kx)$, где $\psi(p) = J_j^{-\frac{1}{2}} \varphi \exp(ikS_j(p))$ и $\tilde{\psi}$ — преобразование Фурье функции ψ. Имеем

$$\|k^{n/2}\tilde{\psi}(kx)\| = \|\tilde{\psi}(x)\| = (2\pi)^{n/2}\|\psi(p)\| < C\|\varphi\|.$$

Первое равенство доказывается заменой $kx=y$, второе — это равенство Парсеваля. В случае (34) доказательство аналогично. ■

Через $O(k^{-N})$ будем обозначать функции в шаре $|x|<b$, для которых $\|u\| = O(k^{-N})$ при $k\to\infty$.

Пусть карта Ω_j диффеоморфно проектируется и в R^2_x, и в R^2_p, так что в этой карте предканонический оператор можно опреде-

лить как по формуле (32), так и по формуле (33). Оказывается, что так определенные операторы в существенном отличаются только на постоянный множитель, а именно справедливо следующее утверждение. Так как p — локальные координаты на Ω_j, то Ω_j можно записать в виде $x=x(p)$. Обозначим через $\gamma=\operatorname{inerdex} \partial x/\partial p$ — число отрицательных собственных значений матрицы $\partial x/\partial p$.

Теорема 1. *Если Ω_j диффеоморфно проектируется в $R^2{}_x$ и в $R^2{}_p$, $K(\Omega_j)$ — оператор, определенный формулой* (32), $\widetilde{K}(\Omega_j)$ — *оператор, определенный формулой* (33), *то* $\gamma=\mathrm{const}$, т. е. *не зависит от точки $\lambda\in\Omega_j$, и для любой $\varphi\in C^\infty{}_0(\Omega_j)$*

$$\widetilde{K}(\Omega_j)\,\varphi=e^{i\frac{\pi}{2}\gamma}K(\Omega_j)\,\varphi+O(k^{-1}). \tag{35}$$

Доказательство. При сделанных предположениях карту Ω_j можно задать уравнениями $p=p(x)$, $x\in U_j\subset R^2{}_x$ или $x=x(p)$, $p\in U'_j\in R^2{}_p$. Значит, эти уравнения задают взаимно-однозначное соответствие между точками областей U_j и U'_j. Кроме того, так как при выборе в качестве локальных координат и x, и p якобианы (27) отличны от нуля, то $J=|D(x)/D(p)|\neq0$, $p\in\bar{U}'_j$. В частности, отсюда следует, что $\gamma=\mathrm{const}$.

Равенство (35) теперь получается после применения к интегралу (33) метода стационарной фазы. Обозначим через F фазовую функцию в интеграле (33), через H — ее гессиан: $H=\{\partial^2F/\partial p_i\partial p_j\}$. Точки стационарной фазы определяются из уравнения $\nabla_pF=x+\nabla_pS_j(p)=0$. В силу (28) это уравнение можно переписать так: $x-x(p)=0$, при этом $H=-\partial x/\partial p$. Указанное выше однозначное соответствие между U_j и U'_j приводит к тому, что для каждой точки $x\in U_j$ существует и притом единственная точка стационарной фазы $p=p(x)\in\bar{U}'_j$, а при $x\bar{\in}U_j$ на носителе функции $\varphi(p)$ нет точек стационарной фазы. Значит, если x принадлежит любому компакту, лежащему вне U_j, то интеграл (33) при $k\to\infty$ убывает равномерно по x быстрее k^{-N} при любом N (теорема 6 гл. I). Функция (32) при этом равна нулю. Равенство (35) теперь является следствием того, что при $x\in U_j$ выражение (32) является главным членом асимптотики интеграла (33), вычисленным по методу стационарной фазы (теорема 7 гл. I). При проверке последнего утверждения нужно только учесть, что из того, что $J\neq0$, следует невырожденность точки стационарной фазы, а из (31) следует, что F в точке стационарной фазы совпадает с фазовой функцией S_j в выражении (32). ■

Аналогичное утверждение справедливо (и также доказывается) и в более общей ситуации.

Теорема 1′. *Пусть в качестве локальных координат в Ω_j можно взять (x_α, p_β) и $(x_{\tilde\alpha}, p_{\tilde\beta})$; $K(\Omega_j)$, $\tilde{K}(\Omega_j)$ — операторы, определенные формулой* (34), *построенные по этим локальным координатам. Тогда если координаты (x_α, p_β) и $(x_{\tilde\alpha}, p_{\tilde\beta})$ определяют одну и ту же точку $\lambda\in\Omega_j$, $\lambda\bar{\in}\Sigma(\Lambda)$, то следующая разность*

по модулю 4

$$\gamma = \left[-\operatorname{inerdex} \frac{\partial x_\beta (x_\alpha, p_\beta)}{\partial p_\beta} + \operatorname{inerdex} \frac{\partial x_{\tilde\beta} (x_{\tilde\alpha}, p_{\tilde\beta})}{\partial p_{\tilde\beta}}\right] (\mathrm{mod}\, 4)$$

не зависит от λ, *так что* $\exp(i\pi\gamma/2) = \mathrm{const}$. *При этом*

$$\tilde K(\Omega_j)\varphi = e^{i\frac{\pi}{2}\gamma} K(\Omega_j)\varphi + O(k^{-1}).$$

Следующее важное утверждение называется *теоремой о коммутации.* На ней основана процедура построения асимптотических решений с помощью канонического оператора.

Теорема 2. *Для любой функции* $\varphi \in C^\infty{}_0(\Omega_j)$ *и любого* $N \geqslant 0$

$$[\Delta + k^2 \varepsilon(x)] K(\Omega_j)\varphi = K(\Omega_j)\left[\sum_{m=1}^{1+N} (ik)^{2-m} R_m \varphi\right] + O(k^{-N}), \quad (36)$$

где R_m — *дифференциальные операторы на* Ω_j *порядка* m *и* $R_1 = d/ds$ — *производная в силу системы Гамильтона* (12).

Замечание. Отсутствие слагаемого $(ik)^2 R_0\varphi$ порядка k^2 под знаком предканонического оператора в правой части формулы (36) вызвано тем, что лагранжево многообразие, по которому строится $K(\Omega_j)$, состоит из бихарактеристик гамильтониана, отвечающего оператору $\Delta + k^2\varepsilon(x)$.

Доказательство. 1°. Пусть Ω_j — неособая карта, т. е. оператор $K(\Omega_j)$ дается формулой (32). Согласно определению производящей функции $\nabla S_j(x) = p$, где $(x, p) \in \Lambda$, т. е. точка (x, p) принадлежит какой-то из бихарактеристик задачи (12), (13). Но тогда из леммы 1 следует, что функция $S_j = S_j(x)$ удовлетворяет уравнению эйконала (6). Действие оператора $\Delta + k^2\varepsilon(x)$ на экспоненту (32) в этом случае описано в § 1. А именно, в этом случае справедлива формула (36), причем $R_1\varphi = d\varphi/ds$, $R_2\varphi = \sqrt{J}\,\Delta(\varphi/\sqrt{J})$ (см. (24)), $R_j\varphi = 0$ при $j > 2$, $O(k^{-N}) \equiv 0$.

2°. Пусть оператор $K(\Omega_j)$ дается формулой (33). Рассмотрим интеграл

$$I_v = \int_{R_p^2} v(x, p)\, e^{ik[S_j(p) + \langle x, p\rangle]}\, dp, \quad (37)$$

где v — бесконечно дифференцируемая функция своих аргументов, равная нулю при $p \overline{\in} U_j$ (U_j — ограниченная область). Очевидно,

$$[\Delta + k^2\varepsilon(x)] K(\Omega_j)\varphi = \frac{ik^3}{-2\pi} I_v, \; v = (|p|^2 - \varepsilon(x)) J_j^{-\frac{1}{2}} \varphi. \quad (38)$$

Пусть $x = x(p)$ — уравнение карты Ω_j. По теореме Лагранжа

$$v(x, p) = v(x(p), p) + \langle x - x(p),\, h(x, p)\rangle,$$

где $h=(h_1, h_2)$ — гладко зависящая от (x, p) вектор-функция. Подставляя это соотношение в (37) и интегрируя по частям с учетом того, что по определению производящей функции $\nabla_p[S_j(p)+\langle x, p\rangle]=x-x(p)$, получаем

$$I_v=\int\limits_{R_p^2} v(x(p), p)\, e^{ik[S_j(p)+\langle x,p\rangle]}\, dp -$$

$$-(ik)^{-1}\int\limits_{R_p^2}\sum_{s=1}^{2}[h_s(x, p)]'_{p_s}\, e^{ik[S_j(p)+\langle x,p\rangle]}\, dp.$$

Второй интеграл отличается от I_v только видом функции v и множителем $-(ik)^{-1}$. Применив к нему то же самое рассуждение, мы можем получить следующий член асимптотического разложения. Продолжая эту процедуру, получаем

$$I_v=\sum_{m=0}^{N}(ik)^{-m} I_{v_m}+O(k^{-N-1}), \tag{39}$$

где функции v_j зависят уже только от p. Нетрудно видеть, что при этом v_j получается из v применением дифференциального оператора порядка $2j$ и подстановкой $x=x(p)$. В частности,

$$v_0(p)=v(x(p), p),$$

$$v_1(p)=-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{2} v''_{x_s p_s}(x(p), p)-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{2}(v'_{x_s}(x(p), p))'_{p_s}. \tag{40}$$

Подставляя (39) при $v(x, p)=[|p|^2-\varepsilon(x)]J_j^{-1/2}\varphi$ в (38), получаем формулу (36) с дополнительным членом $J_j^{1/2}(ik)^2 v_0(p)$ в скобках справа. При этом $R_1\varphi=J_j^{1/2}v_1$, где функция v_1 имеет вид (40), а v указана в формуле (38). В силу леммы 1 дополнительный член, который возникает справа в (36), равен нулю. Остается показать, что $v_1=J_j^{-1/2}(d\varphi/ds)$. Но из (40) и (38) имеем

$$v_1=\langle\nabla_x\varepsilon(x(p)),\ \nabla_p(J_j^{-1/2}\varphi)\rangle +$$

$$+\frac{1}{2}J_j^{-1/2}\varphi\,\mathrm{div}_p(\nabla_x\varepsilon(x(p)))=J_j^{-1/2}(d\varphi/ds).$$

Последнее равенство получается точно так же, как из уравнения (7) было получено уравнение (21).

Теорема 2 в случае, когда $K(\Omega_j)$ имеет вид (33), доказана. Так же она доказывается, когда $K(\Omega_j)$ имеет вид (34). ∎

§ 4. Канонический оператор. Построение формального асимптотического решения

Предканонические операторы дают возможность получить новый, отличный от (23), класс формальных асимптотических решений уравнения (1). Эти формальные асимптотические решения можно искать в виде

$$\psi_N(k, x) = K(\Omega_j)\Big[\sum_{s=0}^{N}(ik)^{-s}\varphi_s\Big], \quad \varphi_s \in C_0^\infty(\Omega_j). \tag{41}$$

Подставляя это выражение в уравнение (4), применяя теорему 2 о коммутации и приравнивая к нулю члены при одинаковых степенях (ik), получаем рекуррентную *систему уравнений переноса*

$$R_1\varphi_0=0,\ R_1\varphi_1=-R_2\varphi_0,\ R_1\varphi_2=-R_2\varphi_1-R_3\varphi_0, \ldots . \tag{42}$$

Из теоремы 2 и леммы 5 следует, что если функции φ_s являются решениями этой системы, то функция (41) будет формальным асимптотическим решением уравнения (1). Эта процедура наталкивается на небольшую трудность: из (42) следует, что $\varphi_0=\mathrm{const}$ вдоль траекторий системы Гамильтона, что противоречит тому, что $\varphi_0\in C^\infty{}_0(\Omega_j)$. Эту трудность можно обойти, но при этом функция ψ_N будет формальным асимптотическим решением только в некоторой области пространства $R^2{}_x$. Аналогичная ситуация имела место и при отыскании асимптотических решений в виде (23): они тоже существовали только локально. Кроме того, нас интересуют не любые формальные асимптотические решения, а удовлетворяющие вполне определенным граничным условиям. Всего этого можно достигнуть, «сшивая» формулы (41) с помощью разбиения единицы на Λ. Эта «сшивка» и дается каноническим оператором.

Каноническим оператором K_Λ называется оператор из $C^\infty(\Lambda)$ в $C^\infty(R^2{}_x)$, определяемый формулой

$$K_\Lambda\varphi=\sum_{j=1}^{m}c_jK(\Omega_j)[e_j\varphi],\ \ \varphi\in C^\infty(\Lambda). \tag{43}$$

Здесь $\{e_j\}$ — разбиение единицы на Λ_b, построенное в § 2, а c_j — константы, которые мы сейчас определим и которые возникают естественно при склеивании операторов $K(\Omega_i)$ и $K(\Omega_j)$ по формулам теорем 1, 1′.

Пусть в карте Ω_i локальными координатами являются (x_α, p_β), а в Ω_j — $(x_{\tilde\alpha}, p_{\tilde\beta})$. Если $\Omega_i\cap\Omega_j\neq\varnothing$, назовем *индексом пары карт* Ω_i, Ω_j число

$$\gamma(\Omega_i,\Omega_j)=\left[-\mathrm{inerdex}\,\frac{\partial x_\beta(x_\alpha,p_\beta)}{\partial p_\beta}+\mathrm{inerdex}\,\frac{\partial x_{\tilde\beta}(x_{\tilde\alpha},p_{\tilde\beta})}{\partial p_{\tilde\beta}}\right] (\mathrm{mod}\,4), \tag{44}$$

где (x_α, p_β) и $(x_{\tilde\alpha}, p_{\tilde\beta})$ определяют одну и ту же точку $\lambda\in\Omega_i\cap\Omega_j$, $\lambda\,\overline{\in}\,\Sigma(\Lambda)$. В силу теоремы 1′ эта величина не зависит от точки

$\lambda\in\Sigma(\Lambda)$. Если $\Omega_i\cap\Omega_j=\varnothing$, положим $\gamma(\Omega_i,\Omega_j)=0$. Если имеется цепочка карт $\Omega_{i_0}^i, \Omega_{i_1}, \ldots, \Omega_{i_s}$ (так что пересечения $\Omega_{i_j}\cap\Omega_{i_j+1}$ не пусты), то *индексом* этой *цепочки* называется число

$$\gamma(\Omega_{i_0}, \ldots \Omega_{i_s}) = [\gamma(\Omega_{i_0}, \Omega_{i_1}) + \ldots + \gamma(\Omega_{i_{s-1}}, \Omega_{i_s})] (\mathrm{mod}\ 4). \tag{45}$$

Ланграножево многообразие M называется *квантованным*, если: 1) $\int\limits_C \langle p, dx\rangle = 0\ \forall$ замкнутого контура $C\subset M$; 2) индекс $\forall$ замкнутой цепочки карт $=0$. Односвязные лагранжевы многообразия квантованы [78], т. е. Λ — квантовано (лемма 3). Пусть Ω_{j_0} — карта с координатами x_1, x_2, содержащая точку из (13), и γ_j — индекс цепочки C_j карт, соединяющих Ω_{j_0} с Ω_j. В силу квантованности Λ γ_j не зависит от выбора C_j. В (43) положим

$$c_j = \exp(-i\pi\gamma_j/2). \tag{46}$$

Эти константы выбраны так, что для любой $\varphi\in C^\infty_0(\Omega_i\cap\Omega_j)$

$$c_i K(\Omega_i)\varphi = c_j K(\Omega_j)\varphi + O(k^{-1}). \tag{47}$$

Эта формула следует из (44) и теоремы 1′.

Будем искать асимптотическое решение уравнения (1) в виде $\psi=K_\Lambda\varphi$ с некоторой $\varphi\in C^\infty(\Lambda)$. Подставив оператор (43) в уравнение (4) и воспользовавшись теоремой 2, получим

$$[\Delta + k^2\varepsilon(x)]\, K_\Lambda\varphi = (ik)\sum_{j=1}^{m} c_j K(\Omega_j)\,[R_1(e_j\varphi)] + O(1) =$$

$$= (ik)\sum_{j=1}^{m} c_j K(\Omega_j)\,[(R_1 e_j)\varphi] + (ik)\, K_\Lambda(R_1\varphi) + O(1). \tag{48}$$

Первое слагаемое в правой части имеет порядок $O(1)$. Действительно, пусть все Λ покрыто двумя картами. Тогда $e_j\equiv 1$ вне пересечения $\Omega_1\cap\Omega_2$ и $R_1 e_j\in C^\infty_0(\Omega_1\cap\Omega_2)$. Записывая слагаемые

$$c_1 K(\Omega_1)[(R_1 e_1)\varphi] + c_2 K(\Omega_2)[(R_1 e_2)\varphi] \tag{49}$$

в координатах какой-нибудь одной карты с помощью (47) и учитывая, что $R_1(e_1+e_2)\equiv 0$, получаем, что величина (49) имеет порядок $O(k^{-1})$. Точно также проверяется, что первое слагаемое в (48) есть $O(1)$ в общем случае. Таким образом,

$$[\Delta + k^2\varepsilon(x)] K_\Lambda\varphi = (ik) K_\Lambda[R_1\varphi] + O(1). \tag{50}$$

Возьмем теперь функцию φ, удовлетворяющую уравнению $R_1\varphi = d\varphi/ds = 0$ и начальным условиям (25), т. е. $\varphi\equiv\sqrt{2}$. Тогда из (50) получим:

Теорема 3. *Функция $K_\Lambda[\sqrt{2}]$ удовлетворяет уравнению*

$$[\Delta + k^2\varepsilon(x)] K_\Lambda[\sqrt{2}] = O(1), \quad k\to\infty. \tag{51}$$

Таким образом, построена функция, удовлетворяющая уравнению (1), с точностью до $O(1)$: (Заметим, что если подставить в урав-

нение (1) функцию $u(k, x)$, не зависящую от k, то правая часть будет иметь порядок $O(k^2)$.)

Для того чтобы удовлетворить уравнению (1) с большей точностью, надо прежде всего уточнить формулу (50). Оказывается, что вместо формулы (50) можно получить утверждение, аналогичное теореме 2.

Теорема 4. *Для любой функции* $\varphi \in C^\infty(\Lambda)$ *и любого* $N \geqslant 0$

$$[\Delta + k^2 \varepsilon(x)] K_\Lambda \varphi = K_\Lambda \Big[\sum_{m=1}^{N+1} (ik)^{2-m} B_m \varphi \Big] + O(k^{-N}), \tag{52}$$

где B_m — *дифференциальные операторы на* Λ *порядка* m *и* $B_1 = R_1 = d/ds$ — *производная в силу системы Гамильтона* (12).

Это утверждение доказывается [78], как и формула (50), с помощью теоремы 2. Надо только еще записать в виде канонического оператора слагаемые типа (49). Так как это делается не совсем тривиально, то здесь мы не будем проводить соответствующих выкладок и потому не получим явного вида операторов B_m, $m > 1$.

Будем теперь искать решение уравнения (4) в виде

$$\psi_N = K_\Lambda \Big[\sum_{j=0}^{N} (ik)^{-j} \varphi_j \Big], \quad \varphi_j \in C^\infty(\Lambda). \tag{53}$$

с неизвестными функциями φ_j. Подставив функцию (53) в оператор, получим, согласно теореме 4 и лемме 5, что

$$[\Delta + k^2 \varepsilon(x)]\, \psi_N = K_\Lambda \Big[\sum_{m=1}^{N+1} (ik)^{2-m} h_m \Big] + O(k^{-N}), \tag{54}$$

где

$$h_1 = R_1\varphi_0,\ h_2 = R_1\varphi_1 + B_2\varphi_0,\ h_3 = R_1\varphi_2 + B_2\varphi_1 + B_3\varphi_0, \ \dots .$$

Полагая последовательно $h_j \equiv 0$, $j = 1, 2, \dots, N+1$, получаем рекуррентную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций φ_j (*уравнений переноса*)

$$R_1\varphi_0 = 0,\ R_1\varphi_1 = -B_2\varphi_0,\ R_1\varphi_2 = -B_2\varphi_1 - B_3\varphi_0, \dots, \tag{55}$$

где $R_1 = d/ds$. Интегрируя соотношения (55) с начальными условиями (25), получаем функции φ_j, для которых первое слагаемое в правой части (54) равно нулю, т. е. для которых справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Если функции* $\varphi_j \in C^\infty(\Lambda)$ *являются решением рекуррентной системы уравнений переноса* (55) *и удовлетворяют начальным условиям* (25), *то*

$$[\Delta + k^2 \varepsilon(x)] K_\Lambda \Big[\sum_{j=0}^{N} (ik)^{-j} \varphi_j \Big] = O(k^{-N}),\ k \to \infty,$$

т. е. функция (53) *является формальным асимптотическим решением уравнения* (1).

Замечание 1. При доказательстве теоремы 5 мы нигде не использовали условия (25). Теорема 5 будет справедлива, если функции φ_j удовлетворяют только уравнениям переноса. Начальные условия (25) необходимы для того чтобы построенное формальное асимптотическое решение $\psi_N(k, x)$ было близко к точному решению $\psi(k, x)$ задачи рассеяния, причем они имеют вид (25), если $(x_\alpha, p_\beta) = x$ для карт, содержащих точки из (13).

Замечание 2. Так как решением первого из уравнений переноса является функция $\varphi_0 \equiv \sqrt{2}$ и в силу леммы 5

$$K_\Lambda\Big[\sum_{j=1}^{N}(ik)^{-j}\varphi_j\Big] = O(k^{-1}), \text{ то } K_\Lambda[\sqrt{2}]$$

является старшим членом формального асимптотического решения, построенного в теореме 5.

Еще раз напомним, что отдельным вопросом стоит задача обоснования, т. е. доказательство того, что построенное формальное асимптотическое решение близко к точному решению $\psi(k, x)$ задачи рассеяния. При обосновании, конечно, существенно используется выбор начальных данных (13) для системы Гамильтона и выбор начальных данных (25) для функций φ_j в формуле (53). Оказывается, что справедлива (см. гл. XI).

Теорема 6. *Если $\psi(k, x)$ — точное решение задачи рассеяния* (1)—(3), *а функции $\varphi_j \in C^\infty(\Lambda)$ удовлетворяют уравнениям переноса* (55) *и начальным данным* (25), *то*

$$\psi(k, x) - K_\Lambda\Big[\sum_{j=0}^{N}(ik)^{-j}\varphi_j\Big] = O(k^{-N-1}), \ k \to \infty. \tag{56}$$

В частности,

$$\psi(k, x) - K_\Lambda[\sqrt{2}] = O(k^{-1}), \ k \to \infty.$$

Напомним, что через $O(k^{-N})$ мы обозначаем функции, имеющие соответствующий порядок малости только в среднем, т. е. для которых $\|u\|_{L_2(|x|<b)} = O(k^{-N})$ при $k \to \infty$. Соответствующие равномерные оценки будут справедливы, если взять N достаточно большим.

Резюме. Конструкция формального асимптотического решения задачи (1)—(3).

1. По уравнению и начальным условиям задачи выписываем систему Гамильтона и начальные данные для нее. Для задачи (1)—(3) они имеют вид (12), (13) соответственно. Находим для всех $s \in R^1$ решение этой системы. Двумерное лагранжево многообразие в фазовом пространстве $R^4_{x,p}$, образованное бихарактеристиками (14) этой системы (фазовыми кривыми), обозначим через Λ. Координатами (глобальными) на Λ являются s и ξ.

2. Пусть $A \in \Lambda$ — произвольная точка на Λ с координатами (s, ξ), т. е. если (x, p) — координаты A в $R^4_{x,p}$, то $x = x(s, \xi)$, $p = p(s, \xi)$. Точка A лежит на одной из бихарактеристик (14). Пусть B — та точка начального многообразия $\{(x, p);\ x = (-b, \xi),\ -\infty < \xi < \infty,\ p = (1, 0)\}$, из которой выходит бихарактеристика,

проходящая через A. Пусть L — отрезок этой бихарактеристики, заключенный между точками A и B. Находим по формуле (см. формулу (30))

$$S(s, \xi) = S(B) + \int_L \langle p, dx \rangle = -b + \int_L \langle p, dx \rangle \tag{57}$$

гладкую функцию $S = S(s, \xi)$ на Λ. Здесь положено $S(B) = -b$ согласно (9), а $p = p(s, \xi)$ и $x = x(s, \xi)$ определены в (14).

3. Формальное асимптотическое решение задачи (1)—(3) ищется в круге $|x| < b$. Пусть Λ_b — часть Λ такая, что проекция $\Lambda \setminus \Lambda_b$ в R^2_x лежит вне круга $|x| \leqslant b+1$. Можно взять в качестве Λ_b совокупность точек Λ, для которых $|\xi| \leqslant b+1$, $|s| \leqslant s_0$, где s_0 настолько велико, чтобы при $|\xi| \leqslant b+1$ и $s > s_0$ траектории системы (12), (13) уже покинули круг $|x| \leqslant b+1$. Покроем Λ_b конечным набором открытых двумерных областей Ω_j (картами), в которых Λ диффеоморфно проектируется в одну из координатных лагранжевых плоскостей (x_1, x_2), (p_1, p_2), (x_1, p_2) или (x_2, p_1). Такое покрытие выберем произвольным образом. Если при этом карта Ω_j хорошо проектируется в несколько из этих плоскостей, выберем и зафиксируем любую из них. Обозначать ее будем через (x_α, p_β), $\alpha = \alpha(j)$, где x_α — это вектор из части компонент вектора x, x_β — вектор из оставшихся компонент вектора x. Аналогичный смысл имеют p_α, p_β.

4. По формуле (31) определяем производящую функцию S_j. В этой формуле $(x_\alpha, p_\beta) \in U_j$ — локальные координаты в Ω_j и, значит, глобальные координаты s, ξ, а также x_β, p_α являются функциями x_α, p_β, а функция S определена в (57).

5. Строим любое разбиение единицы на Λ_b, подчиненное покрытию $\{\Omega_j\}$.

6. По формулам (32)—(34) строим предканонические операторы.

7. По формуле (43), где c_j определяются формулами (44)—(46), строим канонический оператор K_Λ. Тогда в силу теоремы 6 $K_\Lambda[\sqrt{2}]$ является решением уравнения (51) и $\psi(k, x) - K_\Lambda[\sqrt{2}] = O(k^{-1})$. Все оценки берутся в норме $L_2(|x| < b)$. С помощью формулы (53) можно построить формальное асимптотическое решение с большей степенью точности. При этом функции $\varphi_j \subset C^\infty(\Lambda)$ определяются из рекуррентной системы уравнений переноса. Решением первого из них будет $\varphi_0 \equiv \sqrt{2}$.

§ 5. Поле в изотропной среде с параболическим волновым фронтом

Обозначим через P параболу $x_1 = (x_2)^2/2a$ в R^2_x. Дебаевская процедура позволяет в некоторой окрестности ω параболы P построить формальное асимптотическое решение уравнения

$$(\Delta + k^2) \psi_N(k, x) = O(k^{-N}), \quad x \in \omega \subset R^2, \tag{58}$$

имеющее вид

$$\psi_N(k, x) = e^{ikS(x)} \sum_{j=0}^{N} (ik)^{-j} a_j(x), \ \operatorname{Im} S \equiv 0, \tag{59}$$

где

$$S(x)|_{x\in P} = 0, \ S'_{x_1}(x)|_{x\in P} > 0, \ a_j(x)|_{x\in P} = \begin{cases} f, & j = 0, \\ 0, & j > 0, \end{cases} \tag{60}$$

где f — заданная гладкая функция на P. При этом S определяется из уравнения эйконала $|\nabla S|^2=1$, а a_j — из уравнений переноса. Из физических соображений следует, что в данном случае геометро-оптические лучи — это прямые, перпендикулярные фронту волны, т. е. параболе P, а функция S положительна справа от параболы (если ось x_1 горизонтальна и направлена вправо), отрицательна слева от параболы и равна по абсолютной величине в любой точке x длине отрезка геометро-оптического луча, соединяющего P и точку x. То же самое, конечно, получится, если функцию S находить формально по методу, изложенному в § 1. Из сказанного, в частности, следует, что функция S (а значит, и решение вида (59)) однозначно определяется только в некоторой окрестности ω параболы, в которой нормали к P не пересекаются. Сейчас мы по схеме, изложенной в конце предыдущего параграфа, построим соответствующее формальное асимптотическое решение уравнения (58) в круге $|x|<b$ произвольного фиксированного радиуса.

1. Уравнению (58) соответствует система Гамильтона

$$x'_s=2p, \qquad p'_s=0, \tag{61}$$

Получим начальные данные для этой системы. Удобно записать параболу P в параметрическом виде: $x_2=\xi$, $x_1=\xi^2/2a$, $-\infty<\xi<$ $<\infty$. Тогда

$$x|_{s=0} = \left(\frac{1}{2a}\xi^2, \xi\right) \in P, \ -\infty < \xi < \infty.$$

Для того, чтобы найти начальные данные для p, продифференцируем первое из соотношений (60) по ξ. Получаем, что при $x\in P$

$$S'_{x_1}(x)\, x'_{1_\xi} + S'_{x_2}(x)\, x'_{2_\xi} = 0.$$

А так как $\nabla S(x)=p$, то получаем следующее соотношение для вектора $p^\circ = p|_{s=0}$: $\langle p^\circ, x'_\xi\rangle=0$. Еще одно условие для компонент этого вектора пишется из уравнения эйконала: $|p^\circ|=1$. Первое из условий для p° означает, что вектор p° ортогонален P, а второе — что его длина равна единице. Второе из соотношений (60) позволяет выбрать направление вектора p°: вектор p° направлен в область, лежащую справа от параболы. Окончательно

имеем

$$\begin{cases} x|_{s=0} = \left(\frac{1}{2a}\xi^2, \xi\right) \\ p|_{s=0} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+\xi^2}}, \frac{-\xi}{\sqrt{a^2+\xi^2}}\right), \quad -\infty<\xi<\infty. \end{cases} \tag{62}$$

Решая систему (61) с этими начальными данными, получаем

$$\begin{cases} p_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+\xi^2}}, \quad p_2 = \frac{-\xi}{\sqrt{a^2+\xi^2}}, \\ x_1 = \frac{1}{2a}\xi^2 + \frac{2as}{\sqrt{a^2+\xi^2}}, \; x_2 = \xi - \frac{2\xi s}{\sqrt{a^2+\xi^2}}. \end{cases} \tag{63}$$

Эти уравнения при фиксированном ξ и $-\infty<s<\infty$ определяют бихарактеристики L задачи (61), (62). Геометро-оптические лучи, т. е. проекции этих бихарактеристик в R^2_x, являются прямыми перпендикулярными параболе P. Совокупность всех этих бихарактеристик составляет лагранжево многообразие Λ, записанное в параметрическом виде ($-\infty<s, \xi<\infty$).

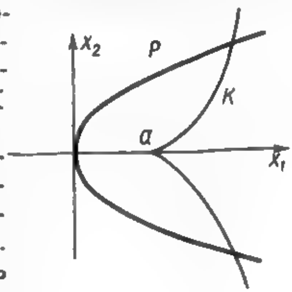

Рис. 6

Каустические точки для данного семейства лучей можно найти или из геометрических соображений, или аналитически, приравняв нулю якобиан $J=|D(x_1, x_2)/D(s, \xi)|$. Условие $J=0$ дает нам следующую связь между s и ξ: $2a^2s-(a^2+\xi^2)^{3/2}=0$. Подставляя $s=2^{-1}a^{-2}(a^2+\xi^2)^{3/2}$ в (63), получаем цикл особенностей $\Sigma(\Lambda)$ на Λ. Его проекция K в R^2_x (т. е. результат подстановки этого значения s в последние два из уравнений (63)) дает нам каустику (см. рис. 6). Она задается уравнением $(x_2)^2=8(x_1-a)^3/(27a)$ и является эволютой исходной параболы. Таким образом, построенное ниже формальное асимптотическое решение будет определять поле в окрестности простой каустики и в окрестности «клюва» каустики.

2. По формуле (56) определяем функцию S на Λ. Так как $S|_{x\in P}=0$ и $\xi=\text{const}$ вдоль L, то

$$S(s, \xi) = \int_L \langle p, dx\rangle = \int_L \langle p, x_s'\rangle\, ds = 2\int_L ds = 2s.$$

3. Пусть Λ_b — часть многообразия Λ такая, что проекция $\Lambda\setminus\Lambda_b$ в R^2_x лежит в области $|x|>b+1$. Конкретный вид Λ_b нам пока не нужен. Нам нужно покрыть Λ_b картами Ω_j, в которых Λ_b диффеоморфно проектируется в одну из координатных лаган-

жевых плоскостей. Поскольку имеется каустика, то заведомо Λ_b целиком не проектируется диффеоморфно в R^2_x. Подсчитывая якобианы $D(x_1, p_2)/D(s, \xi)$, $D(x_2, p_1)/D(s, \xi)$, $D(p_1, p_2)/D(s, \xi)$, обнаруживаем, что уже первый из них нигде в нуль не обращается. Значит, все лагранжево многообразие Λ, и Λ_b в частности, проектируется диффеоморфно на плоскость $R^2_{x_1 p_2}$. Таким образом, можно было бы взять следующее покрытие Λ_b картами Ω_1 и Ω_2: в качестве Ω_1 взять любую окрестность в Λ цикла особенностей $\Sigma(\Lambda)$, а в качестве Ω_2 взять $\Lambda\setminus\Sigma(\Lambda)$. В качестве локальных координат в Ω_1 берутся (x_1, p_2), а в Ω_2 — (x_1, x_2). Но можно поступить проще, взяв всего одну карту $\Omega_1=\Lambda$ и (x_1, p_2) в качестве координат в ней. Так мы и поступим. Из (63) находим, что Λ задается уравнениями

$$\left\{\begin{aligned} x_2 &= \frac{(x_1-a)\,p_2}{\sqrt{1-p_2^2}} - \frac{ap_2^3}{2(1-p_2^2)^{3/2}}, \\ p_1 &= \sqrt{1-p_2^2}, \end{aligned}\right. \tag{64}$$

где $-\infty<x_1<\infty$, $-1<p_2<1$.

4. По формуле (31) находим производящую функцию S_1. Так как $S(s, \xi)=2s$, то сначала из (63) выражаем s через локальные координаты (x_1, p_2). Получаем, что

$$2s = \frac{x_1}{\sqrt{1-p_2^2}} - \frac{ap_2^2}{2(1-p_2^2)^{3/2}}.$$

Значит, согласно (31), производящая функция S_1 равна

$$S_1(x_1, p_2) = \frac{x_1}{\sqrt{1-p_2^2}} - \frac{ap_2^2}{2(1-p_2^2)^{3/2}} - \frac{(x_1-a)\,p_2^2}{\sqrt{1-p_2^2}} +$$

$$+ \frac{ap_2^4}{2(1-p_2^2)^{3/2}} = x_1\sqrt{1-p_2^2} + \frac{ap_2^2}{2\sqrt{1-p_2^2}}.$$

5. Поскольку карта Ω_1 всего одна, то построить разбиение единицы на Λ_b означает найти какую-нибудь функцию $e\in C_0^\infty(\Lambda)$, равную единице на Λ_b. Эта функция должна иметь компактный носитель, и, значит, взять $e\equiv 1$ нельзя. Удобно искать ее в координатах (x_1, p_2). Покажем, что в качестве e можно взять функцию $e(x_1, p_2)=h_1(x_1)h_2(p_2)$, где h_i — произвольные бесконечно гладкие функции такие, что $h_1(x_1)=1$ при $|x_1|\leqslant b+1$, $h_1(x_1)=0$ при $|x|>b+2$, $h_2(p_2)=1$ при $|p_2|\leqslant p'=B/\sqrt{a^2+B^2}$, $h_2(p_2)=0$ при $|p_2|\geqslant p''=(B+1)/\sqrt{a^2+(B+1)^2}$, где $B>0$ достаточно велико. Прежде всего отметим, что так как $p''<1$, то из (64)

следует, что указанная функция e имеет на Λ компактный носитель. Остается показать, что можно выбрать $B>0$ настолько большим, чтобы та часть Λ, на которой $e\neq 1$, попадала при проектировании в R^2_x в область $|x|>b+1$. Таким образом, надо показать, что если $|x_1|>b+1$ или $|p_2|>p'$, то для точек $(x, p)\in\Lambda$ с данными координатами (x_1, p_2) будет справедлива оценка $|x|>b+1$. Так как из того, что $|x_1|>b+1$, конечно, следует, что $|x_1|>b+1$, то остается рассмотреть случай $|p_2|>p'$. В силу (63) это неравенство эвивалентно неравенству $|\xi|>B$. Из последних двух уравнений (63) легко следует, что можно взять любое B такое, что $B\geqslant \max(b+1, \sqrt{2a(b+1)})$. Функция e построена.

6. Предканонический оператор $K(\Omega_1)$ определяется по формуле (34). Так как

$$\left|\frac{D(x_1, p_2)}{D(s, \xi)}\right| = \frac{2a^3}{(a^2+\xi^2)^2} = 2a^{-1}(1-p_2^2)^2,$$

то для любой $\varphi\in C_0^\infty(\Lambda)$

$$K(\Omega_1)\varphi = \sqrt{\frac{k}{-2\pi i}}\times$$

$$\times\int\limits_{R^1}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}\,(1-p_2^2)}e^{ik\left(x_1\sqrt{1-(p_2)^2}+\frac{a(p_2)^2}{2\sqrt{1-(p_2)^2}}+x_2p_2\right)}\varphi(x_1, p_2)\,dp_2.$$

7. По формулам (44)—(46) определяем константу c_1. Так как в силу (64) $\partial x_2/\partial p_2=-a<0$ в точке $x_1=p_2=0$, то $c_1=\exp(-i\pi/2)$. Значит, согласно формуле (43),

$$K_\Lambda\varphi = e^{-i\frac{\pi}{2}}K(\Omega_1)[e(x_1, p_2)\varphi],\quad \varphi\in C^\infty(\Lambda),$$

где функция e была построена выше. Так как этой формулой мы будем пользоваться только при $|x|<b$, то сомножитель h_1 в функции e можно отбросить. Окончательно, при $|x|<b$ для любой функции $\varphi\in C_0^\infty(\Lambda)$

$$K_\Lambda\varphi = \sqrt{\frac{ak}{4\pi}}\times$$

$$\times\int\limits_{R^1}\frac{1}{1-p^2}e^{ik\left(x_1\sqrt{1-p^2}+\frac{ap^2}{2\sqrt{1-p^2}}+x_2p\right)-i\frac{\pi}{4}}h(p)\varphi(x_1, p)\,dp, \tag{65}$$

где $\varphi(x_1, p)$ — значение функции φ в точке $\lambda\in\Lambda$ с координатами (x_1, p_2), $p_2=p$; $h(p)$ — произвольная фиксированная бесконечно дифференцируемая функция, равная единице при $|p|<B/\sqrt{a^2+B^2}$ и равная нулю при $|p|>(B+1)/\sqrt{a^2+(B+1)^2}$, $B\geqslant\max(b+1, \sqrt{2a(b+1)})$ — любое.

Далее, имеют место теоремы, аналогичные теоремам 5, 6. В частности, если

$$\psi_N(k, x) = K_\Lambda\Big[\sum_{j=0}^{N} (ik)^{-j}\varphi_j\Big] \tag{66}$$

и функции $\varphi_j \in C^\infty(\Lambda)$ удовлетворяют уравнениям переноса, то функция ψ_N будет удовлетворять уравнению (58). Первое из уравнений переноса имеет вид $d\varphi_0/ds = 0$. По аналогии с тем как условия (10) приводили к начальным данным (25), теперь из (60) получаем начальные данные для функций φ_j:

$$\varphi_j|_{s=0} = \begin{cases} [J(\xi)]^{1/2} f(\xi), & j = 0, \\ \varphi_j(\xi), & j > 0, \end{cases}$$

где $f(\xi)$ — значение функции f, определенной в (60), в точке параболы P с параметром ξ и $J(\xi) = |D(x_1, x_2)/D(s, \xi)|_{s=0}$, а функции x_1, x_2 определены в (63). Отсюда

$$\varphi_0 = \left[\frac{4}{a^2}(a^2 + \xi^2)\right]^{1/4} f(\xi) = \left(\frac{4}{1 - p^2}\right)^{1/4} f\left(\frac{-ap}{\sqrt{1 - p^2}}\right).$$

Окончательно, подставляя φ_0 вместо φ в формулу (65), получаем главный член $\psi_0(k, x)$ формального асимптотического решения, т. е. такую функцию ψ_0, что

$$(\Delta + k^2)\psi_0(k, x) = O(1), \qquad k \to \infty,$$

и существует функция ψ_N, удовлетворяющая уравнению (58) и такая, что $\psi_N(k, x) = \psi_0(k, x) + O(k^{-1})$. Здесь все остаточные члены оцениваются в норме $L_2(|x| < b)$. Можно оценить правую часть в (58) и в равномерных нормах. Так, если функции φ_j удовлетворяют уравнениям переноса, то для функции (66) имеет место оценка $|(\Delta + k^2)\psi_N| < Ck^{-N+1/2}$ при $|x| < b$, $k \to \infty$. При этом построенная выше функция ψ_0 является главной частью ψ_N в том смысле, что $|\psi_N(k, x) - \psi_0(k, x)| < Ck^{-1/2}$ при $|x| < b$ и $k \to \infty$.

Таким образом, главный член ψ_0 формального асимптотического решения задачи получен нами в виде интеграла сразу для всех x из круга $|x| < b$. Можно попытаться упростить выражение для ψ_0. Сделав в интеграле (65) замену $p = -\alpha/\sqrt{a^2 + \alpha^2}$, получим

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (a^2 + \alpha^2)^{-\frac{1}{4}} f(\alpha)\, q(\alpha) \times$$

$$\times e^{ik\left(ax_1 + \frac{\alpha^2}{2} - \alpha x_2\right)\frac{1}{\sqrt{a^2 + \alpha^2}} - i\frac{\pi}{4}}\, d\alpha, \tag{67}$$

где $q(\alpha) = h(-\alpha/\sqrt{a^2 + \alpha^2})$ — произвольная бесконечно дифференцируемая функция, такая, что при некотором

$B \geqslant \max(b+1, \sqrt{2a(b+1)})$ функция $q(\alpha)=1$, когда $|\alpha|<B$, и $q(\alpha)=0$, когда $|\alpha|>B+1$. Когда точка (x_1, x_2) не принадлежит каустике, интеграл (67) можно вычислить с помощью метода стационарной фазы. Легко проверяется, что точками стационарной фазы являются те и только те значения α, при которых геометрооптические лучи с $\xi=\alpha$ проходят через (x_1, x_2). Можно также упростить выражение (67) для точек (x_1, x_2), лежащих в окрестности каустики (см. § 6).

§ 6. Более общие задачи

Схема построения формальных асимптотических решений в общем случае очень мало отличается от изложенной выше. Построим такие решения для произвольного дифференциального оператора $P(x, -i\partial/\partial x; k)$, полиномиально зависящего от параметра k. Пусть $P(x, p; k)$ — его характеристический многочлен и $P_0(x, p; k)$ — старшая однородная по переменным (p, k) часть этого многочлена. Пусть $H(x, p)=P_0(x, p; 1)$ — вещественная функция. Если кроме пространственных переменных в оператор входит переменная t, то будем обозначать ее через x_0, а двойственную переменную — через p_0. В этом случае через x будем обозначать вектор $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, через p — вектор $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$. Например, $P=\partial^2/\partial t^2-\Delta$. Тогда $H=-p_0^2+\sum\limits_{i\geqslant 1} p_i^2$. Если $P=\partial^2/\partial t^2-\Delta+a(x)k^2$, то $H=-p_0^2+\sum\limits_{i\geqslant 1} p_i^2+a(x)$. Если $P=i\hbar\partial/\partial t+(\hbar^2/2m)\Delta-V(x)$, $k=\hbar^{-1}$, то $H=-p_0-(2m)^{-1}\sum\limits_{i\geqslant 1} p_i^2-V(x)$.

Пишем систему Гамильтона (11) с гамильтонианом $H(x, p)$. Начальные данные для этой системы диктуются начальными условиями для искомого формального асимптотического решения. В типичной ситуации имеется несколько начальных условий для формального асимптотического решения, например два начальных условия в задаче Коши для волнового уравнения. Начальные данные для системы Гамильтона ставятся точно так же, как и при решении задачи «в малом» (см. гл. IV). Соответственно, начальные данные для системы Гамильтона определяют несколько семейств бихарактеристик. Каждое из этих семейств определяет в фазовом пространстве лагранжево многообразие. По этим лагранжевым многообразиям Λ_i, $1<i<m$, строятся канонические операторы K_{Λ_i} точно так же, как это делалось в изученных выше примерах. Формальное асимптотическое решение уравнения $Pu=0$ ищется в виде

$$u=\sum_{i=1}^{m} K_{\Lambda_i}\varphi_i, \tag{68}$$

где нужно заменить функции φ_l на суммы

$$\varphi_l = \sum_{j=0}^{N} (ik)^{-j} \varphi_{lj}, \tag{69}$$

если мы хотим получить более точное приближение. Далее, имеет место аналог теоремы 4, в котором только оператор R_1 имеет более сложный вид (см. лемму 5 гл. IV). Например, если многочлен $P(x, p; k) = P_0(x, p; k)$ однороден по переменным p, k, то

$$R_1 \varphi_l = \frac{d\varphi_l}{ds} - \frac{1}{2} \operatorname{Sp} \left\{ \frac{\partial^2 H(x, p)}{\partial x \, \partial p} \right\} \varphi_l,$$

где d/ds — производная вдоль бихарактеристик системы Гамильтона, образующих Λ_l. Если теперь функции φ_l удовлетворяют уравнению $R_1\varphi_l = 0$ и начальным данным, которые выписываются по начальным условиям для u, то функция (68) будет главным членом формального асимптотического решения. Полностью формальное асимптотическое решение, удовлетворяющее уравнению с любой наперед заданной степенной (по k) точностью, может быть получено в виде (68), если, как и в разобранных выше примерах, искать функции φ_l в виде (69), где φ_{lj} находятся последовательно из рекуррентной системы уравнений переноса.

Переход от построения формальных асимптотических решений для одного уравнения к решениям для систем совершается точно так же, как и при построении решений «в малом» (см. гл. IV).

Поле в окрестности каустик. Канонический оператор дает интегральное представление формального асимптотического решения задач, в том числе на каустиках и в окрестности каустик. После получения явных формул можно провести классификацию того, как может быть устроено решение в окрестности каустической точки [4]. Без ограничения общности будем считать эту точку началом координат. Оказывается, решение всегда, за исключением некоторых вырожденных случаев (т. е. в случае общего положения), можно записать в окрестности данной каустической точки в некоторой подходящим образом выбранной системе координат одним из следующих способов:
при $n=1$

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x', p_1)\, e^{ik(\pm p_1^3 - x_1 p_1)}\, dp_1,$$

при $n=2$, кроме того, еще

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x', p_1)\, e^{ik(\pm p_1^4 + x_2 p_1^2 - x_1 p_1)}\, dp_1,$$

при $n=3$, кроме того, еще

$$u=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_2, x_3, p_1)\, e^{ik(\pm p_1^5+x_3p_1^3+x_2p_1^2-x_1p_1)}\, dp_1,$$

$$u=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_3, p_1, p_2)\, e^{ik(\pm p_1^2p_2\pm p_2^3+x_3p_2^2-x_2p_2-x_1p_1)}\, dp_1\, dp_2.$$

Здесь φ — гладкая функция своих аргументов, x' надо опустить при $n=1$, $x'=x_2$ при $n=2$, $x'=(x_2, x_3)$ при $n=3$.

Литературные указания, дополнения. Подробнее с методом канонического оператора Маслова можно познакомиться по монографиям [74, 78, 86, 143]. Несколько позже возник и параллельно развивается близкий метод интегрального оператора Фурье [118, 132, 187, 90].

Круг задач, к которым применим метод канонического оператора, описан во введении к этой главе. Отметим, что мы совсем не останавливались на возможностях применения канонического оператора к исследованию граничных задач (см. литературные указания к предыдущей главе), а также на важной разновидности канонического оператора — операторах с комплексной фазой (см. [75, 76, 65]). В последние годы канонический оператор применялся также к изучению нелинейных задач [77, 79].

Глава VI

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

В этой главе описываются важнейшие результаты теории эллиптических задач в ограниченной области: разрешимость, конечномерность ядра, аналитические свойства резольвенты. Начинается изложение с изучения используемых в дальнейшем пространств функций. Указанным вопросам посвящен целый ряд монографий и обзорных статей [1—3, 117, 92, 71, 85] и др. Цель настоящей главы — напомнить эти результаты настолько, чтобы можно было использовать их в последующих главах. Поэтому доказательства будут приводиться только в тех случаях, когда соответствующее утверждение является одновременно очень важным, не очевидным и легко доказываемым.

§ 1. Пространства Соболева — Слободецкого

Напомним, что через $S=S(R^n)$ обозначается пространство бесконечно дифференцируемых функций $u=u(x)$, убывающих на бесконечности вместе со всеми своими производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$, через $S'=S'(R^n)$ — пространство линейных непрерывных функционалов (обобщенных функций) на S (см. [46, 40]).

Преобразование Фурье $\tilde{\varphi}(\sigma)$ функций $\varphi\in S$ определяется по формуле

$$\tilde{\varphi}(\sigma)=\int_{R^n}\varphi(x)\,e^{i\langle\sigma,x\rangle}\,dx.$$

Тогда обратное преобразование F^{-1} дается выражением

$$\varphi(x)=F^{-1}\tilde{\varphi}=(2\pi)^{-n}\int_{R^n}\tilde{\varphi}(\sigma)\,e^{-i\langle\sigma,x\rangle}\,d\sigma.$$

Если f — регулярный функционал, соответствующий локально интегрируемой, растущей на бесконечности не быстрее некоторой степени $|x|$ функции $f=f(x)$, то его значение на основной функции $\varphi\in S$ определяется формулой

$$(f,\varphi)=\int_{R^n}\overline{f(x)}\,\varphi(x)\,dx.$$

Поэтому, если $\tilde{u}(\sigma)\in L_1$, то

$$(\tilde{u}, \psi) = \int_{R^n} \overline{\tilde{u}(\sigma)}\, \psi(\sigma)\, d\sigma, \;\; \psi\in S; \;\; u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} \tilde{u}(\sigma)\, e^{-i<\sigma,x>}\, d\sigma,$$

и преобразование Фурье функций $u\in S'$ определяется равенством $(\tilde{u}, \tilde{\varphi}) = (2\pi)^n (u, \varphi)$, $\varphi\in S$.

В частности, в следующей главе при решении уравнения с постоянными коэффициентами $P(i\partial/\partial x)u=f$ в случае, если следующие ниже выражения имеют смысл, будем иметь

$$\tilde{u} = \frac{\tilde{f}(\sigma)}{P(\sigma)}; \quad (\tilde{u}, \psi) = \int_{R^n} \overline{\frac{\tilde{f}(\sigma)}{P(\sigma)}}\, \psi(\sigma)\, d\sigma;$$

$$u(x) = F^{-1}\tilde{u} = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} \frac{\tilde{f}(\sigma)}{P(\sigma)}\, e^{-i<\sigma,x>}\, d\sigma.$$

Пусть s — произвольное действительное число. *Пространство Соболева — Слободецкого* $H^s = H^s(R^n)$ — это пространство обобщенных функций $u\in S'(R^n)$, преобразование Фурье $\tilde{u}(\sigma)$ которых является локально интегрируемой функцией такой, что

$$\|u\|_s = \Big[\int_{R^n} |\tilde{u}(\sigma)|^2 (1+|\sigma|^2)^s\, d\sigma\Big]^{1/2} < \infty. \tag{1}$$

По формуле (1) вводится норма в пространстве H^s. Обозначим через $\tilde{H}^s$ фурье-образ пространства H^s. Так как $\tilde{H}^s$ — это пространство $L_2(R^n)$ с весом $(1+|\sigma|^2)^{s/2}$, то $\tilde{H}^s$, а значит, и H^s является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$\langle u, v\rangle = \int_{R^n} \tilde{u}(\sigma)\, \overline{\tilde{v}(\sigma)}\, (1+|\sigma|^2)^s\, d\sigma.$$

Значит, пространства H^s и $\tilde{H}^s$ полны.

Так как функции из пространства S плотны в $\tilde{H}^s$, а преобразование Фурье переводит пространство S в себя, то функции из пространства S плотны также и в H^s. Можно показать, что и функции из $C^\infty_0(R^n)$ плотны в пространстве H^s (по норме (1)). Очевидно, $H^s\subset H^{s-\delta}$ при $\delta>0$.

При целых $s=m\geqslant 0$ пространство H^m совпадает с пространством Соболева $W^m = W^m_2(R^n)$, состоящим из функций $u\in L_2(R^n)$, все обобщенные производные которых (в смысле пространства $S'(R^n)$) до порядка m включительно принадлежат $L_2(R^n)$. Норма в пространстве W^m вводится по формуле

$$\|u\|^2_{W^m} = \sum_{|p|\leqslant m} \|D^p u\|^2_{L_2}.$$

Здесь и ниже используются следующие обозначения: если $p = (p_1, \ldots, p_n)$ вектор с целочисленными неотрицательными компонентами, то

$$|p| = \Sigma p_j, \quad D^p = (i)^{|p|} \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{p_n}}, \quad \sigma^p = \sigma_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot \sigma_n^{p_n}. \qquad (2)$$

Покажем, что $H^m = W^m$. Согласно равенству Парсеваля,

$$\|u\|_{W^m} = (2\pi)^{-n} \sum_{|p| \leqslant m} \|\sigma^p \widetilde{u}\|^2_{L_2} = (2\pi)^{-n} \int_{R^n} |\widetilde{u}(\sigma)|^2 \sum_{|p| \leqslant m} (\sigma^p)^2 \, d\sigma. \qquad (3)$$

Легко доказывается существование констант C_1, C_2, таких, что

$$C_1 (1 + |\sigma|^2)^m \leqslant \sum_{|p| \leqslant m} (\sigma^p)^2 \leqslant C_2 (1 + |\sigma|^2)^m, \sigma \in R^n. \qquad (4)$$

(Оценка (4) следует также из леммы 2 гл. VII.) Эквивалентность норм в пространствах H^m и W^m и, значит, совпадение этих пространств являются очевидным следствием соотношений (1), (3), (4). Точно также доказывается, что функции из H^{-m} представляют собой обобщенные производные функций из $L_2(R^n)$ порядка не выше m. Таким образом, индекс s указывает на максимальную гладкость функций из пространства H^s. Можно было бы ввести оператор дробного дифференцирования так, чтобы пространство H^s при любом $s \geqslant 0$ было эквивалентно пространству функций, производные которых до порядка s суммируемы с квадратом. Очевидно, оператор дифференцирования $\partial/\partial x_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, является ограниченным оператором из пространства H^s в H^{s-1}.

Из существования обобщенных производных, даже суммируемых с квадратом, еще не вытекает непрерывность функции. Однако если s достаточно велико, функции из пространства H^s будут непрерывны. Справедлива следующая теорема вложения Соболева: при $s > n/2 + l$ оператор вложения $H^s \to C^l(R^n)$ непрерывен, $l = 0, 1, 2, \ldots$. (Нам это утверждение не понадобится.)

Следующие два утверждения существенно используются при работе с пространствами H^s. В частности, они необходимы, чтобы определить соответствующие пространства на границе области (или на любом гладком многообразии).

Лемма 1. *Если функция $y = y(x)$ задает невырожденное бесконечно дифференцируемое отображение R^n в R^n и $y = x$ в некоторой окрестности бесконечности, то оператор в H^s, переводящий $u(x)$ в $u(y(x))$, является ограниченным.*

Лемма 2. *Оператор умножения на функцию $\psi \in S(R^n)$ ограничен в H^s.*

Если Ω — область в R^n, то через $H^s(\Omega)$ обозначается пространство обобщенных функций $u \in D'(\Omega)$, допускающих продолжение lu на $D'(R^n)$, принадлежащее $H^s(R^n)$. Норма в $H^s(\Omega)$ вводится по формуле

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \inf \|lu\|_s,$$

где нижняя грань берется по всем продолжениям. Это пространство изоморфно фактор-пространству $H^s(R^n)/H^s_{R^n\setminus\Omega}(R^n)$, где $H^s_{\bar G}(R^n)$ — подпространство пространства $H^s(R^n)$, состоящее из функций $u\in H^s(R^n)$, равных нулю вне $\bar G$. Если область G имеет достаточно гладкую границу, то $H^s_{\bar G}(R^n)$ совпадает с пространством $\mathring{H}^s(G)$, которое определяется как замыкание пространства бесконечно дифференцируемых в R^n функций с компактным носителем, принадлежащим G, в норме пространства $H^s(R^n)$.

Пусть $\Omega\subset R^n$ — область с бесконечно гладкой компактной $(n-1)$-мерной границей Γ и $\{U_j\}$ — такое конечное покрытие границы Γ областями $U_j\subset R^n$, для которого существуют невырожденные бесконечно дифференцируемые отображения $x\to y=y^j(x)$, переводящие U_j в единичный шар $|y|<1$ так, что $U_j\cap\Omega$ переходит в полушар $|y|<1$, $y_n>0$, а $U_j\cap\Gamma$ — в $\{y:y_n=0,\ |y'|<1\}$, где $y'=(y_1, \ldots, y_{n-1})$. Пусть $\{\varphi_j\}$ — разбиение единицы на Γ, подчиненное указанному покрытию (см. лемму 2 гл. I), так что для любой функции u, заданной на Γ, имеем $u=\Sigma\varphi_j u$. Функции $\varphi_j u$ можно записать в локальных координатах y': $\varphi_j u=(\varphi_j u)(x(y'))$. Говорят, что $u\in H^s(\Gamma)$, если $\varphi_j u$ при всех j как функции y' принадлежат пространству $H^s(R^{n-1})$. Норма в пространстве $H^s(\Gamma)$ определяется формулой

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)}=\Sigma\|\varphi_j u\|_{H^s(R^{n-1})}.$$

С помощью лемм 1, 2 можно легко показать, что пространство $H^s(\Gamma)$ не зависит от разбиения единицы $\{\varphi_j\}$, нормы, введенные с помощью разных разбиений, эквивалентны, и пространство $H^s(\Gamma)$ — полное.

Оператор следа. Пусть, как и выше, Ω — область в R^n с компактной бесконечно гладкой $(n-1)$-мерной границей Γ. Для функции $u\in C^\infty(\bar\Omega)$ через γu обозначим ее след на Γ. Оказывается, что для любого $s>1/2$ и любой функции $u\in C^\infty(\bar\Omega)\cap H^s(\Omega)$

$$\|u\|_{H^{s-1/2}(\Gamma)}\leqslant C\|u\|_{H^s(\Omega)}, \tag{5}$$

где константа C не зависит от функции u. Докажем эту оценку. Из лемм 1, 2 следует, что достаточно рассмотреть случай, когда $\Omega=R^n_+=\{x: x\in R^n, x_n>0\}$ и $u\in C_0^\infty(R^n)$. Обозначим через $\tilde u(\sigma)$ преобразование Фурье функции u и через $\tilde w(\sigma', x_n)$ — преобразование Фурье функции u по переменным $x'=(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Тогда

$$\tilde w(\sigma', x_n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde u(\sigma)e^{-ix_n\sigma_n}d\sigma_n,$$

и по неравенству Коши — Буняковского

$$|\tilde w(\sigma', x_n)|^2\leqslant\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde u(\sigma)|^2(1+|\sigma|^2)^s d\sigma_n\times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\sigma'|^2+|\sigma_n|^2)^{-s}\, d\sigma_n. \tag{6}$$

После замены переменных $\sigma_n = \sqrt{1+|\sigma'|^2}\,\eta$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|\sigma'|^2+|\sigma_n|^2)^{-s}\, d\sigma_n =$$

$$= (1+|\sigma'|^2)^{-s+\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} (1+\eta^2)^{-s}\, d\eta = C\,(1+|\sigma'|^2)^{-s+\frac{1}{2}}. \tag{7}$$

Поэтому, умножив неравенство (6) на $(1+|\sigma'|^2)^{s-\frac{1}{2}}$ и проинтегрировав по σ', получаем оценку (5).

Поскольку бесконечно дифференцируемые функции плотны в пространстве $H^s(\Omega)$, то оценка (5) позволяет с помощью операции замыкания определить оператор следа γ на всем пространстве $H^s(\Omega)$. Справедлива

Теорема 1. *При $s>1/2$ оператор следа является ограниченным оператором из пространства $H^s(\Omega)$ в $H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ и переводит $H^s(\Omega)$ на все $H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.*

Первая часть этой теоремы доказана. Вторую мы оставим без доказательства. Хотим только отметить отличие сформулированного результата от аналогичного результата в пространствах Гёльдера, где оператор взятия следа сохраняет гладкость функций. Здесь же происходит потеря гладкости на $1/2$, причем нетрудно привести пример, показывающий, что при любом $\delta>0$ оператор $\gamma: H^s(\Omega) \to H^{s+\delta-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ будет неограниченным. Действительно, пусть функция u равна обратному преобразованию Фурье от функции $v=(1+|\sigma|^2)^{-(n+2s+2\delta)/4}$. Очевидно, $u\in H^s(R^n_+)$. При этом $\widetilde{\gamma u} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} v\, d\sigma_n$ и из (7) следует, что $\gamma u \overline{\in} H^{s+\delta-\frac{1}{2}}(R^{n-1})$. Условие $s>1/2$ в теореме 1 также существенно. Например, оператор взятия следа для функций из пространства $L_2(\Omega)=H^0(\Omega)$ $(s=0)$ не определен.

Теорема 2 (теорема вложения Соболева). *Для любой ограниченной области $\Omega\subset R^n$ и любого $\delta>0$ операторы вложения $i_0: H^s_{\overline{\Omega}}(R^n) \to H^{s-\delta}_{\overline{\Omega}}(R^n)$ и $i: H^s(\Omega)\to H^{s-\delta}(\Omega)$ компактны.*

Это утверждение аналогично теореме Арцеля, согласно которой из каждой равномерно ограниченной и равностепенно непре-

рывной последовательности функций на отрезке можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность. Если несколько загрубить теорему Арцеля, заменив требование равностепенной непрерывности на равномерную ограниченность производных, то теорема Арцеля превратится в утверждение о компактности оператора вложения $C^1(\Omega)\to C^0(\Omega)$, где Ω — отрезок числовой оси.

Доказательство теоремы 2. Компактность оператора i_0 будет доказана, если мы покажем, что из любой последовательности функций $u_m\in H^s_{\Omega}(R^n)$, $m=1, 2, \ldots$, такой, что $\|u_m\|_s<1$, можно выбрать подпоследовательность u_{m_j}, $j=1, 2, \ldots$, фундаментальную в $H^{s-\delta}(R^n)$. Пусть $\varphi\in C_0^\infty(R^n)$ и $\varphi=1$ при $x\in\Omega$. Тогда $u_m=\varphi u_m$ и, значит, $\widetilde{u}_m=\widetilde{\varphi}*\widetilde{u}_m$ и для любого вектора α

$$|D^\alpha_\sigma\widetilde{u}_m(\sigma)|\leqslant\int|D^\alpha_\sigma\widetilde{\varphi}(\sigma-\xi)\,\widetilde{u}_m(\xi)|\,d\xi\leqslant$$
$$\leqslant\left(\int|D^\alpha_\sigma\widetilde{\varphi}(\sigma-\xi)|^2(1+|\xi|^2)^{-s}\,d\xi\right)^{1/2}\|u_m\|_s.$$

Так как $D^\alpha_\sigma\widetilde{\varphi}\in S(R^n)$, то интеграл в правой части последнего неравенства ограничен в любом шаре $|\sigma|<R$. Значит, $|D^\alpha_\sigma\widetilde{u}_m(\sigma)|<C(\alpha, R)$ при $|\sigma|<R$. Применяя теорему Арцеля, получаем, что из последовательности $\widetilde{u}_m(\sigma)$ можно выбрать сходящуюся равномерно в шаре $|\sigma|<1$, из нее — сходящуюся равномерно в шаре $|\sigma|<2R$ и т. д. Тогда диагональная последовательность $\widetilde{u}_{m_j}(\sigma)$ будет сходиться равномерно в любом шаре $|\sigma|\leqslant R$. Покажем, что последовательность u_{m_j}, $j=1, 2, \ldots$ фундаментальна в $H^{s-\delta}(R^n)$.

Возьмем любое $\varepsilon>0$ и пусть $(1+R^2)^\delta=8/\varepsilon$. Имеем

$$\|u_{m_j}-u_{m_k}\|^2_{s-\delta}=\int\limits_{|\sigma|>R}|\widetilde{u}_{m_j}-\widetilde{u}_{m_k}|^2(1+|\sigma|^2)^{s-\delta}\,d\sigma+$$
$$+\int\limits_{|\sigma|<R}|\widetilde{u}_{m_j}-\widetilde{u}_{m_k}|^2(1+|\sigma|^2)^{s-\delta}\,d\sigma.$$

Первое слагаемое обозначим через I_1, второе — через I_2. Очевидно,

$$I_1\leqslant(1+R^2)^{-\delta}\int\limits_{|\sigma|>R}|\widetilde{u}_{m_j}-\widetilde{u}_{m_k}|^2(1+|\sigma|^2)^s\,d\sigma\leqslant$$
$$\leqslant(1+R^2)^{-\delta}\|u_{m_j}-u_{m_k}\|^2_s\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку последовательность $\widetilde{u}_{m_j}$ равномерно сходится в шаре $|\sigma|\leqslant R$, то существует такое N, что $I_2<\varepsilon/2$ при $j,\ k>N$. Таким образом, $I_1+I_2<\varepsilon$ при $j,\ k>N$, т. е. последовательность u_{m_j}, $j=1, 2, \ldots$, фундаментальна в $H^{s-\delta}(R^n)$. Компактность оператора i_0 доказана.

Пусть теперь $u_m \in H^s(\Omega)$, $m=1, 2, \ldots$, и норма функций u_m не превосходит единицы. Тогда существуют функции $lu_m \in H^s(R^n)$, такие, что $\|lu_m\|_s < 2$. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(R^n)$ и $\varphi = 1$ при $x \in \Omega$. В силу леммы 2 $\|\varphi l u_m\|_s < C$, где C не зависит от m. Из компактности оператора $i_0 : H^s_{\overline{\Omega}_1}(R^n) \to H^{s-\delta}_{\overline{\Omega}_1}(R^n)$, где область Ω_1 содержит $\operatorname{supp}\varphi$, следует существование подпоследовательности $\varphi l u_{m_j}$, $j = 1, 2, \ldots$, фундаментальной в $H^{s-\delta}(R^n)$. Тогда последовательность u_{m_j}, $j=1, 2, \ldots$, будет фундаментальна в $H^{s-\delta}(\Omega)$, что доказывает компактность оператора i. ■

§ 2. Эллиптические задачи

Определение. *Оператор* $P(i\partial/\partial x)$ и его *характеристический многочлен* $P(\sigma)$ называются *эллиптическими*, если $P_0(\sigma) \neq 0$ при $\sigma \in R^n$, $\sigma \neq 0$, где $P_0(\sigma)$ — старшая однородная часть многочлена $P(\sigma)$. Оператор $P(x, i\partial/\partial x)$ называется *эллиптическим в области* Ω, если оператор $P(x^0, i\partial/\partial x)$ эллиптичен в каждой точке $x^0 \in \Omega$.

Задача. Докажите, что свойство эллиптичности является инвариантным относительно диффеоморфизмов области.

Лемма 3. *Если* $P_0(\sigma)$ *— однородный эллиптический многочлен порядка* l *и* $n \geqslant 3$, *то* $l = 2m$ *— четно и для любых двух линейно независимых векторов* $\xi, \zeta \in R^n$ *уравнение* $P_0(\xi + \tau\zeta) = 0$ *относительно* τ *имеет ровно* m *корней, лежащих в полуплоскости* $\operatorname{Im}\tau > 0$, *и ровно* m, *лежащих в полуплоскости* $\operatorname{Im}\tau < 0$ (*с учетом их кратности*).

Следствие. Если выполнены условия леммы 3, то при каждом $\sigma' = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}) \in R^{n-1}$, $\sigma' \neq 0$, уравнение $P(\sigma', z_n) = 0$ относительно z_n имеет ровно m корней в каждой из полуплоскостей $\operatorname{Im} z_n \lessgtr 0$ (с учетом их кратности).

Доказательство. Соединим точки ξ и $-\xi$ гладкой кривой γ, не пересекающей прямую, проходящую через точки 0 и ζ. Так как $n \geqslant 3$, это возможно. Обозначим через $n_+(\sigma)$ число корней $\tau = \tau(\sigma)$ многочлена $P_0(\sigma + \tau\zeta)$, $\sigma \in \gamma$, для которых $\operatorname{Im}\tau > 0$, и через $n_-(\sigma)$ — число корней, для которых $\operatorname{Im}\tau < 0$. Так как $P_0(\sigma + \tau\zeta)$ является многочленом порядка l по τ с коэффициентом $P_0(\zeta)$ при τ^l и в силу эллиптичности $P_0(\zeta) \neq 0$, то корни $\tau(\sigma)$ непрерывно зависят от $\sigma \in \gamma$. Поскольку $\sigma + \tau\zeta \neq 0$ при $\sigma \in \gamma$, то эти корни не вещественны. Значит, $n_\pm(\sigma)$ не зависят от $\sigma \in \gamma$, т. е. $n_+(\xi) = n_+(-\xi)$. С другой стороны, из однородности P_0 следует, что если $P_0(\xi + \tau\zeta) = 0$, то $P_0(-\xi - \tau\zeta) = 0$, откуда $n_+(-\xi) = n_-(\xi)$. Значит, $n_+(\xi) = n_-(\xi)$. ■

При $n=2$ утверждение леммы 3 может оказаться неверным. Пример: $P_0(i\partial/\partial x) = \partial/\partial x_1 + i\partial/\partial x_2$.

Операторы, для старшей однородной части характеристического многочлена которых справедливо утверждение леммы 3, называются *правильно эллиптическими*. В частности, эллиптические операторы при $n \geqslant 3$ правильно эллиптичны.

Пусть теперь Ω — ограниченная область в R^n с бесконечно гладкой границей Γ, $P(x, i\partial/\partial x)$ — правильно эллиптический оператор в $\bar{\Omega}$ порядка $2m$ с бесконечно дифференцируемыми в $\bar{\Omega}$ коэффициентами, $B_j=B_j(x, i\partial/\partial x)$ — «граничные» дифференциальные операторы порядка m_j, коэффициенты которых являются бесконечно дифференцируемыми функциями x, определенными в некоторой окрестности Γ (если эти коэффициенты определены только на Γ, можно их всегда продолжить на некоторую окрестность с сохранением гладкости; способ продолжения несуществен). Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} Pu=f, \ x\in\Omega, \\ B_j u=\varphi_j, \ x\in\Gamma, \ 1\leqslant j\leqslant m, \end{cases} \tag{8}$$

где число граничных условий равно половине порядка оператора.

Хорошо известно, что для корректности поставленной задачи операторы B_j нельзя задавать произвольно. Например, если $n=2$, $P=\Delta$, а на границе задать условие $\partial u/\partial x_1+i\partial u/\partial x_2=0$ или $\partial u/\partial\nu+i\partial u/\partial l=0$, где ν и l — единичные векторы нормали и касательной к Γ, то однородная задача (8) будет иметь бесконечномерное ядро: ее решением будет любая аналитическая функция переменного $z=x_1+ix_2$ (или $z=x_1-ix_2$ во втором случае, если ориентация системы координат (x_1, x_2) отличается от (ν, l)). Обозначим через $B_{j0}(x, \sigma)$ старшую однородную часть многочлена $B_j(x, \sigma)$, т. е. сумму одночленов многочлена B_j порядка ровно m_j.

Определение. Говорят, что для задачи (8) выполнены *условия Шапиро — Лопатинского*, или что выполнено *условие коэрцитивности*, или что *граничные операторы B_j накрывают оператор P*, если оператор P правильно эллиптичен и для любой точки $x\in\Gamma$ и любого ненулевого касательного к Γ в точке x вектора ξ полиномы $B_{j0}(x, \xi+\tau\nu)$ переменного τ линейно независимы по модулю полинома $\prod_{i=1}^{m}(\tau-\tau_i^+(x, \xi))$, где ν — внешняя нормаль к Γ в точке x, а τ^+_i — корни полинома $P_0(x, \xi+\tau\nu)$ с положительной мнимой частью.

Это условие можно сформулировать и в несколько других терминах. Зафиксируем точку $x=x^0\in\Gamma$, перенесем начало координат в точку x^0 и сделаем поворот осей координат так, чтобы в новых переменных y ось y_n совпадала по направлению с внутренней нормалью к Γ в точке $x=x^0$. Через $\tilde{P}_0(x^0, i\partial/\partial y)$, $\tilde{B}_{j0}(x^0, i\partial/\partial y)$ обозначим операторы, получающиеся при этой замене из операторов P_0, B_{j0}. Легко показать, что условие Шапиро — Лопатинского эквивалентно следующему требованию: оператор P правильно эллиптичен и при всех $x^0\in\Gamma$ и $\sigma'\in R^{n-1}$, $\sigma'\neq 0$, задача

$$\tilde{P}_0\left(x^0, \sigma', i\frac{d}{dy_n}\right)v=0, \ y_n>0,$$

$$\widetilde{B}_{j0}\left(x^0,\ \sigma',\ i\frac{d}{dy_n}\right)v|_{y_n=0}=0,\ 1\leqslant j\leqslant m, \tag{9}$$

должна иметь только тривиальное решение в классе функций, убывающих при $y_n\to\infty$. Отметим, что (в силу правильной эллиптичности оператора P) при всех $x^0\in\Gamma$, $\sigma'\neq 0$ обыкновенное дифференциальное уравнение $\widetilde{P}_0 v=0$, входящее в задачу (9), имеет ровно m линейно независимых решений, убывающих при $y_n\to\infty$.

Задача. Проверьте, что для уравнения Пуассона $\Delta u=f$ задачи Дирихле и Неймана удовлетворяют условию Шапиро — Лопатинского. Задача $\Delta u=f$, $x\in\Omega$; $\partial u/\partial l=\varphi$, $x\in\Gamma$, где l — гладкое невырожденное векторное поле на Γ, называется задачей с косой производной. Докажите, что условие Шапиро — Лопатинского выполнено для нее при $n=2$ всегда, а при $n\geqslant 3$ — в тех и только тех точках границы, где l не касается Γ.

Обозначим через $H^s(\Omega,\ \Gamma)$ прямую сумму пространств:

$$H^s(\Omega,\ \Gamma)=H^s(\Omega)\oplus\sum_{j=1}^{m}H^{s+2m-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \tag{10}$$

с нормой

$$\|(f,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_m)\|_{H^s(\Omega,\Gamma)}=$$

$$=\left[\|f\|^2_{H^s(\Omega)}+\sum_{j=1}^{m}\|\varphi_j\|^2_{H^{s+2m-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)}\right]^{1/2}.$$

Очевидно, $H^s(\Omega,\ \Gamma)$ — гильбертово пространство. Задаче (8) можно сопоставить оператор

$$\mathfrak{A}: H^{s+2m}(\Omega)\to H^s(\Omega,\ \Gamma),\quad s>s^0=\max_{1\leqslant j\leqslant m}\left(-2m+m_j+\frac{1}{2}\right), \tag{11}$$

переводящий функции $u\in H^{s+2m}(\Omega)$ в вектор из правых частей задачи (8). Из теоремы 1 следует, что этот оператор определен и ограничен.

Напомним, что оператор, действующий из одного гильбертова пространства в другое, называется *нётеровым*, если его область значений замкнута, а размерности ядра и коядра конечны. Справедлива

Теорема 3. *Для правильно эллиптического оператора в* $\overline{\Omega}$ *(Ω — ограниченная область) следующие условия эквивалентны*

1. *Для задачи* (8) *выполнены условия Шапиро — Лопатинского.*

2. *При всех $s>s^0$ оператор* (11) *нётеров.*

3. *Для любой функции $u\in H^{s+2m}(\Omega)$, $s>s^0$, справедлива оценка*

$$\|u\|_{H^{s+2m}(\Omega)}\leqslant C\,[\|\mathfrak{A}u\|_{H^s(\Omega,\Gamma)}+\|u\|_{H^0(\Omega)}], \tag{12}$$

где константа C не зависит от u.

Определение. Если оператор P правильно эллиптичен и выполнены условия теоремы 3, то *задача* (8) *называется эллиптической* (*или коэрцитивной*).

Теорема 4. *Если задача* (8) *эллиптична и функция* $u \in H^{s_1+2m}(\Omega)$, $s_1 > s^0$, *является решением задачи* (8), *где* $(f, \varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in H^s(\Omega, \Gamma)$, $s > s_1$, *то* $u \in H^{s+2m}(\Omega)$ *и для нее справедлива оценка* (12). *При этом если однородная задача* (8) *имеет в пространстве* $H^{s+2m}(\Omega)$ *только тривиальное решение, то последнее слагаемое в правой части оценки* (12) *можно опустить.*

Для эллиптических операторов справедливы также локальные априорные оценки.

Теорема 5. *Пусть* Ω_1, Ω_2 — *ограниченные области,* $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. *Если функция* $u \in H^{s_1+2m}(\Omega_2)$, $-\infty < s_1 < \infty$, *является решением уравнения*

$$P(x, i\partial/\partial x)u = f, \quad x \in \Omega_2,$$

где P — *эллиптический оператор в* Ω_2 *порядка* $2m$, $f \in H^s(\Omega_2)$ *и* $s > s_1$, *то* $u \in H^{s+2m}(\Omega_1)$ *и*

$$\|u\|_{H^{s+2m}(\Omega_1)} \leqslant C\,[\|f\|_{H^s(\Omega_2)} + \|u\|_{H^{s_1+2m}(\Omega_2)}], \tag{13}$$

где константа C *не зависит от функции* u.

Теорема 6. *Пусть* Ω_2 — *ограниченная область с бесконечно гладкой границей, область* $\Omega_1 \subset \Omega_2$, $\Gamma' = \partial\Omega_2 \cap \Omega_1'$, *где* Ω_1' — ε-*окрестность множества* Ω_1 ($\varepsilon > 0$ — *некоторая фиксированная константа*). *Пусть* $P(x, i\partial/\partial x)$ — *правильно эллиптический оператор в* $\overline{\Omega}_2$ *порядка* $2m$, *а функция* $u \in H^{s_1+2m}(\Omega_2)$ *удовлетворяет условиям*

$$\begin{cases} P\left(x, i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u = f, & x \in \Omega_2, \\ B_j\left(x, i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u = \varphi_j, & x \in \Gamma',\ 1 \leqslant j \leqslant m, \end{cases} \tag{14}$$

где B_j — *дифференциальные операторы порядка* m_j, *для задачи* (14) *в точках* Γ' *выполнены условия Шапиро — Лопатинского,*

$$f \in H^s(\Omega_2),\ \varphi_j \in H^{s+2m-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma') \text{ и } s > s_1 > s^0.$$

Тогда $u \in H^{s+2m}(\Omega_1)$ *и*

$$\|u\|_{H^{s+2m}(\Omega_1)} \leqslant C\left[\|f\|_{H^s(\Omega_2)} + \sum_{j=1}^{m} \|\varphi_j\|_{H^{s+2m-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma')} + \|u\|_{H^{s_1+2m}(\Omega_2)}\right], \tag{15}$$

где константа C *не зависит от* u.

З а д а ч а. Докажите теоремы 5, 6, применив теорему 4 к функции αu, где $\alpha\in C^\infty(\bar{\Omega}_2)$, $\alpha=1$ в Ω_1 и $\alpha=0$ вне Ω_1' при достаточно малом $\varepsilon>0$. (Заметим, что обычно теоремы 5, 6 доказываются независимо от теоремы 4, а доказательство теорем 3, 4 опирается на теоремы 5, 6).

Системы уравнений изучаются точно так же, как и одно уравнение. Пусть $P(i\partial/\partial x)$ — матрица размера $d\times d$ из дифференциальных операторов порядка не выше l, $P_0(i\partial/\partial x)$ — матрица из старших однородных (порядка ровно l) частей операторов, составляющих матрицу P и $H(\sigma)=\det P_0(\sigma)$. *Матричный оператор $P(i\partial/\partial x)$ называется эллиптическим* (правильно эллиптическим), если таковым является оператор $H(i\partial/\partial x)$. В частности, из этого определения и леммы 3 следует, что для любой правильно эллиптической матрицы число $ld=2m$ четно и при $n\geqslant3$ любая эллиптическая матрица $P(i\partial/\partial x)$ является правильно эллиптической. Все остальные приведенные выше определения и формулилировки результатов автоматически переносятся на случай систем уравнений. При этом число граничных условий в эллиптической задаче (9) в случае систем уравнений равно $ld/2$.

§ 3. Эллиптические задачи с параметром

В ограниченной области $\Omega\subset R^n$ с бесконечно гладкой границей Γ рассмотрим задачу

$$\begin{cases} P\left(x,\ i\dfrac{\partial}{\partial x};\ k\right)u=f,\ x\in\Omega,\\ B_j\left(x,\ i\dfrac{\partial}{\partial x};\ k\right)u=\varphi_j,\ x\in\Gamma,\ 1\leqslant j\leqslant m,\end{cases}\tag{16}$$

где P и B_j — дифференциальные операторы порядка $2m$ и m_j соответственно, с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, полиномиально зависящими от параметра k (комплексного), изменяющегося в угле $Q\colon|k|>0$, $\beta_1<\arg k<\beta_2$ (или на луче в случае $\beta_1=\beta_2$). Предполагается, что многочлены $P(x,\ \sigma;\ k)$ и $B_j(x,\ \sigma;\ k)$ имеют указанные порядки ($2m$ и m_j соответственно) также и по совокупности переменных $(\sigma,\ k)$.

О п р е д е л е н и е. Оператор $P(x,\ i\partial/\partial x;\ k)$ называется *эллиптическим* (*правильно эллиптическим*) *оператором с параметром при $k\in Q$*, если оператор $P(x,\ i\partial/\partial x;\ ik\partial/\partial x_0)$ эллиптичен (правильно эллиптичен) по переменным $(x,\ x_0)$ при $k\in Q$. Отметим, что это условие не зависит от величины $|k|>0$.

З а д а ч а. Проверьте, что оператор $\Delta+k^2$ является эллиптическим оператором с параметром, когда k принадлежит любому углу, не содержащему точек вещественной прямой.

О п р е д е л е н и е. Задача (16) называется *эллиптической задачей с параметром при $k\in Q$*, если для следующей задачи в ци-

линдре $G=\Omega\times R^1$

$$\begin{cases} P\left(x,\ i\dfrac{\partial}{\partial x};\ ik\dfrac{\partial}{\partial x_0}\right)u=f, & (x,x_0)\in G,\\ B_j\left(x,\ i\dfrac{\partial}{\partial x};\ ik\dfrac{\partial}{\partial x_0}\right)u=\varphi_j, & (x,x_0)\in\partial G,\ 1\leqslant j\leqslant m\end{cases}$$

выполнены условия Шапиро — Лопатинского при каждом $k\in Q$ (как и выше, последнее условие не зависит от величины $|k|>0$).

Задачи. 1. Покажите, что эллиптичность задачи (16) при каждом фиксированном $k\in Q$ является необходимым, но не достаточным условием эллиптичности с параметром.

2. Проверьте, что задачи Дирихле и Неймана для оператора $\Delta+k^2$ являются эллиптическими задачами с параметром $k\in Q$, если Q не содержит точек вещественной прямой.

3. Найдите все значения α (комплексного), при которых задача

$$(\Delta+k^2)u=f,\ x\in\Omega;\ \frac{\partial u}{\partial\nu}+\alpha\frac{\partial u}{\partial l}=\varphi,\ x\in\Gamma,$$

является эллиптической или является эллиптической задачей с параметром $k\in Q$. Здесь Ω — область в R^2; ν и l — единичные векторы, направленные по нормали и касательной к Γ, Q — некоторый угол комплексной плоскости, не содержащий точек вещественной прямой.

Введем в пространстве $H^s(\Omega)$, $s\geqslant 0$, следующую зависящую от параметра норму:

$$\|u\|^2_{H^{s,\rho}(\Omega)}=\|u\|^2_{H^s(\Omega)}+\rho^{2s}\|u\|^2_{H^0(\Omega)},\ \rho>0.$$

При каждом фиксированном ρ эта норма эквивалентна введенной ранее. При целых s она, очевидно, эквивалентна норме:

$$\|u\|^2_{H^{s,\rho}(\Omega)}=\sum_{j=0}^{s}\rho^{2j}\|u\|^2_{H^{s-j}(\Omega)},\ \rho>0.$$

Аналогично вводится зависящая от параметра ρ норма в пространствах $H^s(\Gamma)$, $\Gamma=\partial\Omega$:

$$\|u\|^2_{H^{s,\rho}(\Gamma)}=\|u\|^2_{H^s(\Gamma)}+\rho^{2s}\|u\|^2_{H^0(\Gamma)},\ \rho>0.$$

Через $\mathfrak{A}_k$ обозначим оператор (11), который строится по задаче (16).

Теорема 7. *Пусть* $s\geqslant\max(0,-2m+m_j+1)$ *и задача* (16) *является эллиптической задачей с параметром при* $k\in Q$. *Тогда существует такое* $k_0>0$, *что при* $k\in Q$ *и* $|k|>k_0$ *оператор* $\mathfrak{A}_k$ *осуществляет изоморфизм пространств*

$H^{s+2m}(\Omega)$ и $H^s(\Omega, \Gamma)$ *и справедливы оценки*

$$C_1\|u\|_{H^{s+2m,|k|}(\Omega)} \leqslant \|f\|_{H^{s,|k|}(\Omega)} + \sum_{j=1}^{m} \|\varphi_j\|_{H^{s+2m-m_j-\frac{1}{2},|k|}(\Gamma)} \leqslant$$
$$\leqslant C_2\|u\|_{H^{s+2m,|k|}(\Omega)},$$

где константы $C_1, C_2 > 0$ *не зависят от* u *и* $k \in Q$, $|k| > k_0$.

Для эллиптических задач с параметром справедливы следующие аналоги теорем 5, 6.

Теорема 5′. *Пусть* Ω_1, Ω_2 — *ограниченные области,* $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ *и функция* $u \in H^{s_1+2m}(\Omega_2)$, $s_1 \geqslant 0$, *является решением эллиптического уравнения с параметром* $k \in Q$:

$$P\left(x, i\frac{\partial}{\partial x}; k\right)u = f, \; x \in \Omega_2.$$

Если $f \in H^s(\Omega_2)$, $s \geqslant s_1$, *то* $u \in H^{s+2m}(\Omega_1)$ *и*

$$\|u\|_{H^{s+2m,|k|}(\Omega_1)} \leqslant C[\|f\|_{H^{s,|k|}(\Omega_2)} + \|u\|_{H^{s_1+2m,|k|}(\Omega_2)}],$$

где константа C *не зависит от* u *и* $k \in Q$.

Теорема 6′. *Пусть* Ω_1, Ω_2 *и* Γ' — *те же, что и в теореме 6, оператор* $P(x, i\partial/\partial x; k)$ *является правильно эллиптическим оператором с параметром* $k \in Q$, *задача*

$$\begin{cases} P\left(x, i\dfrac{\partial}{\partial x}; k\right)u = f, \; x \in \Omega_2, \\ B_j\left(x, i\dfrac{\partial}{\partial x}; k\right)u = \varphi_j, \; x \in \Gamma', \; 1 \leqslant j \leqslant m, \end{cases}$$

при $x \in \Gamma'$ *удовлетворяет условиям эллиптичности с параметром* $k \in Q$ *и функция* $u \in H^{s_1+2m}(\Omega_2)$, *где* $s_1 \geqslant \max(0, -2m+m_j+1)$, *является решением этой задачи. Тогда если*

$f \in H^s(\Omega_2)$, $\varphi_j \in H^{s+2m-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma')$ *и* $s \geqslant s_1$, *то* $u \in H^{s+2m}(\Omega_1)$ *и*

$$\|u\|_{H^{s+2m,|k|}(\Omega_1)} \leqslant C[\|f\|_{H^{s,|k|}(\Omega_2)} + \sum_{j=1}^{m} \|\varphi_j\|_{H^{s+2m-m_j-\frac{1}{2},|k|}(\Gamma')} +$$
$$+ \|u\|_{H^{s_1+2m,|k|}(\Omega_2)}],$$

где константа C *не зависит ни от* u, *ни от* $k \in Q$.

Все перечисленные результаты справедливы и в случае систем уравнений.

§ 4. Обращение конечно-мероморфного фредгольмова семейства операторов

Пусть $A: H_1 \to H_2$ — оператор, действующий из гильбертова пространства H_1 в H_2. Он называется *фредгольмовым,* если его область значений замкнута, а размерности ядра и коядра конеч-

ны и одинаковы, т. е. фредгольмовы операторы — это такие нётеровы операторы, размерности ядра и коядра которых совпадают.

Пусть U — область комплексной плоскости. Говорят, что *семейство операторов $A_\lambda : H_1 \to H_2$ аналитически зависит от $\lambda \in U$*, если в некоторой окрестности каждой точки $\lambda = \lambda_0 \in U$ операторы A_λ разлагаются в ряд Тейлора, сходящийся в равномерной норме, т. е. существуют такие ограниченные операторы $A_j : H_1 \to H_2$, что

$$\| A_\lambda - \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{j!} A_j (\lambda - \lambda_0)^j \| \to 0 \text{ при } N \to \infty.$$

Аналогично определяется понятие *мероморфной зависимости* операторов от параметра (сходимость ряда Лорана понимается в равномерной норме).

Оператор $A : H_1 \to H_2$ называется *конечномерным*, если он переводит все пространство H_1 в конечномерное подпространство пространства H_2.

Семейство операторов $A_\lambda : H_1 \to H_2$, $\lambda \in U$, называется конечно-мероморфным фредгольмовым, если 1) операторы A_λ мероморфно зависят от параметра λ; 2) для любого полюса $\lambda = \lambda_0 \in U$ семейства A_λ коэффициенты, стоящие при отрицательных степенях $(\lambda - \lambda_0)$ разложения A_λ в ряд Лорана, являются конечномерными операторами; 3) во всех точках $\lambda \in U$, в которых семейство A_λ аналитически зависит от λ, оператор A_λ фредгольмов; для любого полюса $\lambda = \lambda_0 \in U$ семейства A_λ фредгольмовым является оператор, являющийся коэффициентом при нулевой степени $(\lambda - \lambda_0)$ разложения A_λ в ряд Лорана.

Теорема 8 [17]. *Пусть U — связная область комплексной плоскости, $A_\lambda : H_1 \to H_2$, $\lambda \in U$, конечно-мероморфное фредгольмово семейство операторов и существует такое $\lambda_0 \in U$, что оператор A_{λ_0} обратим. Тогда операторы $(A_\lambda)^{-1} : H_2 \to H_1$, $\lambda \in U$, образуют конечно-мероморфное фредгольмово семейство.*

Задача. Приведите примеры, показывающие необходимость всех условий теоремы.

Теорема 9. *Пусть Q — угол $|k| > 0$, $\beta_1 < \arg k < \beta_2$ комплексной плоскости параметра k, $\Omega \subset R^n$ — ограниченная область с бесконечно гладкой границей и задача* (16) *является эллиптической задачей с параметром $k \in Q$. Тогда при $s \geq \max(0, -2m + m_j + 1)$ оператор $\mathfrak{A}_k : H^{s+2m}(\Omega) \to H^s(\Omega, \Gamma)$, соответствующий задаче* (16), *является полиномом по k и фредгольмов при каждом значении $k \in \mathbf{C}$. Обратные операторы $\mathfrak{A}_k^{-1} : H^s(\Omega, \Gamma) \to H^{s+2m}(\Omega)$ образуют конечно-мероморфное фредгольмово семейство операторов при $k \in \mathbf{C}$.*

Доказательство. Так как задача (16) является эллиптической задачей с параметром при $k \in Q$, то она эллиптична при каждом $k \in Q$. Поскольку степени многочленов $P(x, \sigma; k)$,

$B_j(x, \sigma; k)$ по совокупности переменных (σ, k) те же, что и по переменной σ, то старшие однородные по σ части этих многочленов (от которых зависит определение эллиптичности задачи) не зависят от k. Значит, задача (16) эллиптична при любом фиксированном $k \in \mathbf{C}$, и в силу теоремы 3 оператор $\mathfrak{A}_k$ нётеров при каждом $k \in \mathbf{C}$. Далее, индекс нётерова оператора (разность между размерностью ядра и коядра оператора) является гомотопическим инвариантом [7], т. е. индекс оператора $\mathfrak{A}_k$ не зависит от k. А так как при $k \in Q$ и достаточно больших $|k|$ индекс оператора $\mathfrak{A}_k$ в силу теоремы 7 равен нулю, то он будет равен нулю при всех $k \in \mathbf{C}$, т. е. оператор $\mathfrak{A}_k$ фредгольмов при всех значениях $k \in \mathbf{C}$. Из теорем 7, 8 вытекает второе утверждение теоремы 9. ■

Глава VII

УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В R^n

В этой главе будут изучены некоторые классы уравнений в R^n. Поскольку для таких уравнений бесконечно удаленная точка играет роль границы области, то для корректной постановки задачи требуется накладывать какие-то условия на поведение решения при $r\to\infty$. Эти условия могут быть заданы в виде оценок решений или их асимптотического поведения при $r\to\infty$, или принадлежности решения к некоторым пространствам функций, ограничивающим возможности поведения решений в окрестности бесконечности.

В большинстве прикладных задач, которые исследуются с помощью излагаемых ниже методов, соответствующие операторы эллиптичны, и можно было бы ограничиться изучением только таких операторов. Мы будем рассматривать более широкий класс уравнений — гипоэллиптические уравнения, поскольку данный класс уравнений содержит некоторые интересные примеры, а дополнительных трудностей при этом практически не возникает.

§ 1. Уравнения с отличным от нуля характеристическим многочленом

Напомним, что эллиптичность оператора проверяется по старшей однородной части $P_0(\sigma)$ его характеристического многочлена $P(\sigma)$: оператор $P(i\partial/\partial x)$ называется *эллиптическим*, если $P_0(\sigma)\neq0$ при $\sigma\in R^n$, $\sigma\neq0$. В этом параграфе будут рассматриваться эллиптические (и гипоэллиптические) операторы, полный характеристический многочлен которых не имеет вещественных корней: $P(\sigma)\neq0$ при всех $\sigma\in R^n$. Например, если $P^{\pm}(i\partial/\partial x)=\Delta\pm k^2$, $k>0$, то $P^{\pm}(\sigma)=-|\sigma|^2\pm k^2$. При всех k эти операторы эллиптичны, причем $P^{-}(\sigma)\neq0$ при $\sigma\in R^n$, $P^{+}(\sigma)=0$, когда σ принадлежит сфере $|\sigma|=k$.

Лемма 1. *Если $P(i\partial/\partial x)$ — эллиптический оператор порядка $2m$, то существуют такие $R<\infty$ и C_1, $C_2>0$, что при $|\sigma|>R$*

$$C_1|\sigma|^{2m}<|P(\sigma)|<C_2|\sigma|^{2m}. \tag{1}$$

Доказательство. Если многочлен $P(\sigma)=P_0(\sigma)$ однороден и C_1 (C_2) — нижняя (верхняя) грань $|P_0(\sigma)|$ при $|\sigma|=1$, то из

эллиптичности $P_0(\sigma)$ следует, что $C_1>0$. Отсюда и из однородности P_0 следует справедливость оценки (1) для многочлена P_0 при всех $\sigma\in R^n$. Утверждение леммы вытекает из оценки (1) для P_0 и того, что $|P(\sigma)-P_0(\sigma)|<C|\sigma|^{2m-1}$ при $|\sigma|>1$. ■

Из леммы 1, очевидно, следует

Лемма 2. *Если $P(i\partial/\partial x)$ — эллиптический оператор порядка $2m$ и $P(\sigma)\neq 0$ при $\sigma\in R^n$, то существуют такие c_1, $c_2>0$, что*

$$c_1(1+|\sigma|^2)^m<|P(\sigma)|<c_2(1+|\sigma|^2)^m. \tag{2}$$

Задача. Докажите, что комплексные корни $z=\sigma+i\tau$ эллиптического многочлена $P(z)$ удовлетворяют при некоторых $c_1, c_2>0$ неравенству $|\tau|>c_1|\sigma|-c_2$.

Определение. Оператор $P(i\partial/\partial x)$ называется *гипоэллиптическим*, если любое обобщенное решение уравнения $P(i\partial/\partial x)u=0$, $x\in R^n$, является бесконечно дифференцируемой функцией.

Этот класс уравнений хорошо изучен [116, 117]. В частности, принадлежность уравнения указанному классу можно проверить по его характеристическому многочлену, пользуясь следующим утверждением: оператор $P(i\partial/\partial x)$ гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда комплексные корни $z=\sigma+i\tau$ его характеристического многочлена $P(z)$ удовлетворяют неравенству

$$|\tau|>c_1|\sigma|^\gamma-c_2 \tag{3}$$

с некоторыми $c_1>0$, $c_2>0$, $0<\gamma<1$. Нам понадобится следующее свойство характеристических многочленов гипоэллиптических операторов [116, 117]: существует такое $d>0$, что для любого вектора p (с неотрицательными целочисленными компонентами) при достаточно больших $|\sigma|$ справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial^{|p|}}{\partial\sigma_1^{p_1}\cdot\ldots\cdot\partial\sigma_n^{p_n}}\left(\frac{1}{P(\sigma)}\right)\right|\leqslant C_p|\sigma|^{-(|p|+1)d},\quad |p|=\sum p_i. \tag{4}$$

Эллиптические операторы гипоэллиптичны и для них $\gamma=d=1$. Оценка (3) для эллиптических операторов сформулирована выше в виде задачи, а оценки (4) вытекают из леммы 2 (докажите).

Теорема 1. *Если $P(i\partial/\partial x)$ — гипоэллиптический оператор и $P(\sigma)\neq 0$ при $\sigma\in R^n$, то уравнение*

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u=f \tag{5}$$

имеет в пространстве S' и притом единственное решение для любой функции $f\in S'$. Это решение и равно $F^{-1}[P^{-1}(\sigma)\tilde{f}(\sigma)]$, где F^{-1} — оператор обратного преобразования Фурье. При этом $u\in S$, если $f\in S$.

Доказательство. Применяем к обеим частям уравнения преобразование Фурье и используем оценку (4), из которой следует, что функции из пространства S' можно умножать на

$P^{-1}(\sigma)$. Отсюда следует первое утверждение теоремы, а также, что $\tilde{u}=P^{-1}(\sigma)\tilde{f}(\sigma)\in S$, если $\tilde{f}(\sigma)\in S$. ■

Задача. Используя неравенство (3), докажите, что если выполнены условия теоремы 1, $f\in C_0^\infty$ и $a>0$ меньше расстояния от вещественной плоскости до комплексных нулей многочлена $P(z)$, то уравнение (5) имеет решение, для которого $|u|<$ $<C\exp(-a|x|)$. Докажите, что это решение единственно в классе функций, удовлетворяющих оценке $|u|<C\exp(a|x|)$.

Теорема 2. *Если $P(i\partial/\partial x)$ — эллиптический оператор порядка $2m$ и $P(\sigma)\neq 0$ при $\sigma\in R^n$, то отображение*

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right):H^{s+2m}(R^n)\to H^s(R^n)$$

является изоморфизмом при любом вещественном s.

Доказательство. Пусть $Pu=f$ и $f\in H^s(R^n)$. После преобразования Фурье получим $P(\sigma)\tilde{u}(\sigma)=\tilde{f}(\sigma)$ и, значит, $\tilde{u}(\sigma)=$ $=\tilde{f}(\sigma)/P(\sigma)$. Используя только определение нормы в пространствах $H^s(R^n)$ и лемму 2, получаем следующую цепочку неравенств:

$$\|u\|_{s+2m}^2=\int\limits_{R^n}|\tilde{u}(\sigma)|^2(1+|\sigma|^2)^{s+2m}\,d\sigma=\int\limits_{R^n}\left|\frac{\tilde{f}(\sigma)}{P(\sigma)}\right|^2(1+|\sigma|^2)^{s+2m}d\sigma\leqslant$$

$$\leqslant C'\int\limits_{R^n}|\tilde{f}(\sigma)|^2(1+|\sigma|^2)^s\,d\sigma=C\|f\|_s^2.$$

Так же просто доказывается оценка в другую сторону. ■

Точно так же доказывается аналогичное утверждение для гипоэллиптических операторов. Пусть $R(\sigma)$ — произвольный многочлен.

Теорема 2′. *Пусть $P(i\partial/\partial x)$ — гипоэллиптический оператор, $P(\sigma)\neq 0$ при $\sigma\in R^n$ и $|R(\sigma)|<C|P(\sigma)|$ при $\sigma\in R^n$. Тогда если $u\in S'$ является решением уравнения* (5) *и $f\in H^s(R^n)$, то*

$$\left\|R\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u\right\|_s\leqslant C\|f\|_s.$$

Замечание. Из теоремы 2′ и оценки (4), в частности, следует, что при выполнении условий теоремы 2′ $\|u\|_s\leqslant C\|f\|_s$.

Спектр оператора. Пусть $A:H\to H$ — линейный оператор в гильбертовом пространстве H. Говорят, что точка $\lambda\in\mathbf{C}$ принадлежит *спектру оператора* A, если оператор $A-\lambda E$ не имеет ограниченного обратного (здесь и ниже E — единичный оператор). В противном случае говорят, что λ принадлежит *резольвентному множеству*. Число $\lambda\in\mathbf{C}$ называется *собственным значением*, если уравнение $Au=\lambda u$ имеет хотя бы одно нетривиальное решение $u\in H$, эти решения называются *собственными векторами*, отвечающими данному собственному значению. Очевидно, собственные значения принадлежат спектру, при этом спектр, вообще го-

воря, состоит не только из собственных значений. Множество элементов $u \in H$, для которых существует такое $n=n(u)<\infty$, что $(A-\lambda E)^n u=0$, образует линейное пространство, которое мы обозначим через H_λ. В частности, собственные векторы с собственным значением λ принадлежат пространству H_λ. Размерность пространства H_λ называется *алгебраической кратностью собственного значения* λ.

Спектр оператора во многих вопросах приходится делить на две непересекающиеся части: дискретный и непрерывный. Дискретная часть спектра состоит из изолированных точек спектра, являющихся собственными значениями конечной алгебраической кратности. Остальные точки спектра образуют непрерывную часть спектра. Говорят, что спектр оператора непрерывен (дискретен), если он не содержит дискретной (непрерывной) компоненты.

С дифференциальным выражением $P(i\partial/\partial x)$ связан оператор:

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right): L_2(R^n) \to L_2(R^n), \tag{6}$$

определенный на тех функциях $u \in L_2(R^n)$, для которых $Pu \in L_2(R^n)$.

Теорема 3. *Если $P(i\partial/\partial x)$ — гипоэллиптический дифференциальный оператор, то спектр оператора* (6) *непрерывен и состоит из множества значений характеристического многочлена* $P(\sigma)$, $\sigma \in R^n$.

Доказательство. Пусть u — собственная функция оператора (6) с собственным значением λ, т. е. $u \in L_2(R^n)$ и $P(i\partial/\partial x)u-\lambda u=0$. После преобразования Фурье получим $[P(\sigma)-\lambda]\tilde{u}(\sigma)=0$, где $\tilde{u}(\sigma) \in L_2(R^n)$. Значит, $\tilde{u}(\sigma)=0$ вне множества $\{\sigma : \sigma \in R^n,\ P(\sigma)-\lambda=0\}$. Поскольку это множество имеет в R^n меру нуль, то $\tilde{u}(\sigma)=0$ как элемент $L_2(R^n)$, т. е. оператор (6) дискретного спектра не имеет.

Если λ не принадлежит множеству значений характеристического многочлена, т. е. $P(\sigma)-\lambda \neq 0$ при всех $\sigma \in R^n$, то из теоремы 1 и замечания к теореме 2′ следует ограниченность оператора

$$\left[P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)-\lambda\right]^{-1}: L_2(R^n) \to L_2(R^n),$$

т. е. λ не принадлежит спектру оператора. Пусть теперь существует такое $\sigma=\sigma^0$, что $P(\sigma^0)=\lambda$. Для доказательства теоремы остается показать, что в этом случае λ принадлежит спектру, т. е. имеется последовательность функций $u_j \in L_2(R^n)$ такая, что $\|u_j\|=c\neq 0$ и $\|(P-\lambda E)u_j\| \to 0$ при $j\to\infty$. В качестве таких функций можно взять

$$u_j = j^{-n/2}\varphi(x/j)\, e^{-i\langle\sigma^0, x\rangle},$$

где φ — произвольная функция из $C^\infty_0(R^n)$, равная единице в

некоторой окрестности точки $x=0$. Действительно,

$$\|u_j\|^2_{L_2(R^n)} = \int\limits_{R^n} j^{-n} |\varphi(x/j)|^2\, dx = \int\limits_{R^n} |\varphi(x)|^2\, dx = c.$$

С другой стороны, поскольку

$$\left[P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda\right] e^{-i\langle\sigma^0, x\rangle} = [P(\sigma^0) - \lambda]\, e^{-i\langle\sigma^0, x\rangle} = 0,$$

то из леммы 1 гл. IV следует, что

$$\left[P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda\right] u_j = \sum_{|\alpha|\geqslant 1} \frac{1}{\alpha!} j^{-\frac{n}{2}} \left[D_x^\alpha \varphi\left(\frac{x}{j}\right)\right] P^{(\alpha)}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) e^{-i\langle\sigma^0, x\rangle} =$$

$$= \sum_{|\alpha|\geqslant 1} \frac{1}{\alpha!} j^{-\frac{n}{2}-|\alpha|} \left[(D^\alpha \varphi)\left(\frac{x}{j}\right)\right] P^{(\alpha)}(\sigma^0)\, e^{-i\langle\sigma^0, x\rangle}.$$

Вычисляя нормы каждого слагаемого в правой части так же, как выше это делалось для функции u_j, получаем, что они равны $c_\alpha j^{-|\alpha|/2}$ и, значит, $\|(P-\lambda)u_j\| < cj^{-1/2}$. ■

Пример. Спектр оператора $-\Delta$ в $L_2(R^n)$ непрерывен и совпадает с вещественной неотрицательной полуосью.

Матрица $P(i\partial/\partial x)$ из дифференциальных операторов *называется эллиптической* (*гипоэллиптической*), если таковым является оператор $\det P(i\partial/\partial x)$.

Задачи. 1. Докажите, что утверждения теорем 1, 2, 2′ остаются справедливыми в случае систем уравнений, если условие $P(\sigma)\neq 0$ заменить на $\det P(\sigma)\neq 0$, а $|R(\sigma)| < C|P(\sigma)|$ на $\|R(\sigma)P^{-1}(\sigma)\| < C$.

2. Исследуйте справедливость теоремы 3 в случае матричного оператора P.

§ 2. Уравнения и системы типа уравнения Гельмгольца. Условия излучения

Мы начнем с того, что напомним некоторые факты об *уравнении Гельмгольца*

$$(\Delta + k^2)u = f \in C_0^\infty, \quad x \in R^3. \tag{7}$$

Эти факты будут приведены без доказательств, потому что, во-первых, они хорошо известны [106], а во-вторых, вытекают из результатов, которые будут получены ниже для более общих уравнений.

Характеристический многочлен для оператора (7) равен $-|\sigma|^2 + k^2$. При $k>0$ он обращается в нуль на сфере $|\sigma| = k$, и, значит, результаты предыдущего параграфа к уравнению (7) не применимы. Легко находятся (например, если искать их в виде

сферически симметричных функций) следующие два фундаментальных решения уравнения (7):

$$\mathscr{E}_{\pm} = -\frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r}, \ (\Delta + k^2)\,\mathscr{E}_{\pm} = \delta(x).$$

Функции $u_{\pm} = \mathscr{E}_{\pm} * f$, где $*$ — знак свертки, будут решениями уравнения (7) и имеют порядок $O(r^{-1})$ при $r \to \infty$. При любой $g(\sigma) \in C^{\infty}(R^3)$ функция

$$u = \int\limits_{|\sigma|=k} g(\sigma)\, e^{-i(\sigma, x)}\, dS$$

является решением однородного уравнения (7) (проверяется подстановкой в уравнение) и ведет себя как $O(r^{-1})$ при $r \to \infty$ (проверяется с помощью теоремы 9 гл. I). Значит, требование убывания решения на бесконечности как r^{-1} недостаточно для выделения единственного решения уравнения (7). С другой стороны, в классе функций, ведущих себя как $o(r^{-1})$ при $r \to \infty$, уравнение (7), вообще говоря, неразрешимо. Таким образом, условия на бесконечности, выделяющие единственное решение уравнения (7), должны быть более «тонкими», чем задание порядка убывания функции при $r \to \infty$. Такими условиями являются *условия излучения Зоммерфельда*:

$$u = O(r^{-1}), \ \frac{\partial u}{\partial r} - iku = o(r^{-1}), \ r \to \infty, \tag{8}$$

или

$$u = O(r^{-1}), \ \frac{\partial u}{\partial r} + iku = o(r^{-1}), \ r \to \infty. \tag{9}$$

Уравнение (7) однозначно разрешимо в классе функций, удовлетворяющих условиям (8), и в классе функций, удовлетворяющих условиям (9). Условия (8) выделяют решение $u = u_+$, условия (9) — решение $u = u_-$.

Решения $u_{\pm}$ уравнения (7) наиболее интересны с физической точки зрения. Рассмотрим задачу Коши

$$v_{tt} - \Delta v = -f(x)\, e^{\mp ikt}, \ v|_{t=0} = v_t'|_{t=0} = 0, \tag{10}$$

где f — та же, что и в уравнении (7), причем $f = 0$ при $|x| > a$. Задача (10) однозначно разрешима. Доказывается, что при любом R, $|x| < R$ и $t > 2(R + a)$ решение задачи (10) выходит на периодический режим: $v = u_{\pm}(x)\, e^{\mp ikt}$, где $u_{\pm} = \mathscr{E}_{\pm} * f$. Таким образом, функции $u_{\pm}$ описывают амплитуду установившихся колебаний, вызванных периодической силой $F = -f(x)\exp(\mp ikt)$. Способ однозначного выделения решений уравнения (7) в виде

$$u_{\pm} = \lim_{t \to +\infty} e^{\pm ikt}\, v(t, x),$$

где v — решение задачи (10), называется *принципом предельной амплитуды.*

Пусть теперь $k=k_0+i\varepsilon$, где $k_0>0$, $\varepsilon\neq0$. Тогда к уравнению (7) применимы теоремы 1, 2. Обозначим через u_ε решение этого уравнения, принадлежащее, например, пространству $L_2(R^n)$. В силу указанных теорем такое решение существует и единственно. Оказывается, $u_\varepsilon\to u_\pm$ равномерно на каждом компакте при $\varepsilon\to\pm0$, где $u_\pm$ — удовлетворяющие условиям излучения решения уравнения (7) с $k=k_0$. В этом состоит *принцип предельного поглощения*, позволяющий получать решение уравнения (7) предельным переходом из u_ε.

В этом параграфе будут рассматриваться гипоэллиптические уравнения

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u=f,\ x\in R^n, \tag{11}$$

в которых оператор P удовлетворяет следующим двум условиям.

1. $\nabla P(\sigma)\neq0$ в вещественных нулях $P(\sigma)$.

2. Множество вещественных нулей многочлена $P(\sigma)$ состоит из нескольких бесконечно дифференцируемых связных поверхностей S_j, $1<j<\varkappa$, размерности $n-1$.

Из оценки (3) (или (4)) следует, что эти поверхности компактны, а из условия 1 следует, что они не имеют края и общих точек.

Лемма 3. *При выполненном условии* 1 *условие* 2 *эквивалентно следующему условию*

2′. Многочлен $P(\sigma)$ представим в виде

$$P(\sigma)=T(\sigma)P_1(\sigma), \tag{12}$$

где $T(\sigma)$ — гипоэллиптический многочлен с вещественными коэффициентами и $\nabla T(\sigma)\neq0$ в вещественных нулях $T(\sigma)$, а $P_1(\sigma)$— гипоэллиптический многочлен, не имеющий вещественных нулей.

Доказательство. Поскольку гипоэллиптичность многочлена эквивалентна оценке (3) для его комплексных корней, то многочлен $P(\sigma)$, представимый в виде произведения (12), будет гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда гипоэллиптичен каждый из сомножителей T и P_1. Пусть выполнены условия 1, 2 и $R(\sigma)$ — неприводимый сомножитель многочлена $P(\sigma)$, имеющий вещественные нули. Если $R(\sigma)\neq aR_1(\sigma)$, где $a=\mathrm{const}$, а $R_1(\sigma)$ — многочлен с вещественными коэффициентами, то система $\operatorname{Im}R(\sigma)=\operatorname{Re}R(\sigma)=0$ определяет в R^n множество, размерность которого меньше $n-1$. Отсюда следует условие 2′. Наоборот, условие 2 вытекает из 1, 2′ и теоремы о неявной функции. ■

Кроме условий 1, 2 в этой и последующих главах иногда будет требоваться выполнение одного из следующих двух условий (или обоих сразу).

3. Полная кривизна (произведение главных кривизн) поверхностей S_j ни в одной точке не равна нулю.

4. Поверхности S_j, $1\leqslant j<\varkappa$, строго звездны относительно точки $\sigma=0$, т. е. радиус-вектор, проведенный в любую точку поверх-

ности S_j, составляет с вектором внешней нормали к S_j острый угол.

Пусть $\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_\varkappa)$ — вектор, компоненты μ_j которого равны единице или минус единице. Буквами v. p. будем обозначать интегралы в смысле главного значения. В частности,

$$\text{v. p.} \int\limits_{R^n} \frac{\psi(\sigma)}{\overline{P}(\sigma)}\, d\sigma = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{|T(\sigma)|>\varepsilon} \frac{\psi(\sigma)}{\overline{P}(\sigma)}\, d\sigma.$$

Через $E_\mu(\sigma)$ обозначим следующую обобщенную функцию из пространства S':

$$(E_\mu, \psi) = \text{v. p.} \int\limits_{R^n} \frac{\psi(\sigma)}{\overline{P}(\sigma)}\, d\sigma + \pi i \sum_{j=1}^{\varkappa} \mu_j \int\limits_{S_j} \frac{\psi(\sigma)\, dS}{\overline{P}_1(\sigma)\,|\nabla T(\sigma)|}, \quad \psi \in S. \tag{13}$$

Теорема 4. *Пусть оператор $P(i\partial/\partial x)$ гипоэллиптичен и выполнены условия 1, 2. Тогда функция $\mathscr{E}_\mu(x) \in S'$, равная $F^{-1}E_\mu(\sigma)$, является фундаментальным решением оператора $P(i\partial/\partial x)$.*

Доказательство.

$$\left(P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathscr{E}_\mu,\ \varphi\right) = (2\pi)^{-n}(P(\sigma)E_\mu, \widetilde{\varphi}) = (2\pi)^{-n}(E_\mu,\ \overline{P}(\sigma)\widetilde{\varphi}) =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int\limits_{R^n} \widetilde{\varphi}(\sigma)\, d\sigma = (\delta, \varphi). \ \blacksquare$$

Найдем асимптотику при $r\to\infty$ построенных в теореме 4 фундаментальных решений (этих решений столько, сколько различных векторов μ, т. е. $2^\varkappa$ штук). Зададим на поверхностях S_j ориентацию, выбрав в качестве вектора нормали $\nu = \mu_j \nabla T(\sigma)/|\nabla T(\sigma)|$, где $\mu_j = \pm 1$ — компоненты зафиксированного выше вектора μ. Пусть сначала выполнены условия 1—3. Тогда поверхности S_j выпуклы, и для любого $\omega = x/r$ на каждой поверхности S_j есть ровно одна точка $\sigma=\sigma^j(\omega)$, $1<j<\varkappa$, в которой указанный вектор нормали ν параллелен вектору ω и направлен в ту же сторону, и ровно одна точка $\sigma = \sigma^{\varkappa+j}(\omega)$, $1<j<\varkappa$, в которой эти векторы имеют противоположные направления. Через $\mu_s(\omega)$, $1<s<2\varkappa$, обозначим величину проекции (со знаком) вектора $\sigma^s(\omega)$ на вектор ω:

$$\mu_s(\omega) = \langle \sigma^s(\omega),\ \omega \rangle. \tag{14}$$

Обозначим через $k_s(\omega)$ полную кривизну поверхности $P(\sigma) = 0$ (ориентированной указанным выше вектором нормали ν) в точке $\sigma^s(\omega)$, и пусть $\delta_j = \pm 1$ в зависимости от того, совпадают ли направления векторов ν и внешней нормали к S_j или противоположны. Через Ω обозначим единичную сферу в R^n.

Теорема 5. *Пусть гипоэллиптический оператор $P(i\partial/\partial x)$ удовлетворяет условиям 1—3. Тогда его фундаментальные реше-*

ния, построенные в теореме 4, имеют при $r\to\infty$ следующее равномерное по $\omega\in\Omega$ асимптотическое разложение:

$$\mathscr{E}_\mu(x)\sim\sum_{j=1}^{\varkappa}e^{-i\mu_j(\omega)r}\sum_{l=0}^{\infty}a_{jl}(\omega)\,r^{\frac{1-n}{2}-l}\ ,\tag{15}$$

где $a_{jl}\in C^\infty(\Omega)$,

$$a_{j0}=-i\,(2\pi)^{\frac{1-n}{2}}\frac{e^{i\delta_j(n-1)\pi/4}}{\sqrt{|k_j(\omega)|}\,\frac{\partial P}{\partial\nu}(\sigma^j(\omega))},\tag{16}$$

и разложение (15) *допускает почленное дифференцирование по x любое число раз.*

Докажем сначала два вспомогательных утверждения.

Лемма 4. *Для любой гладкой функции $f(t)$*

$$\left|\text{v. p.}\int\limits_{|t|<\delta}t^{-1}f(t)\,dt\right|\leqslant 2\delta\sup_{|t|\leqslant\delta}|f'(t)|.$$

Доказательство. Требуемая оценка вытекает из соотношения

$$\text{v.p.}\int\limits_{|t|<\delta}t^{-1}f(t)\,dt=\int\limits_{|t|<\delta}t^{-1}[f(t)-f(0)]\,dt=\int\limits_{|t|<\delta}f'(\theta t)\,dt,$$

где $\theta=\theta(t)$, $|\theta|\leqslant 1$. ■

В следующей лемме Ω — не обязательно сфера в R^n, а любое компактное бесконечно-дифференцируемое m-мерное многообразие, точки которого обозначаются через ω.

Лемма 5. *Пусть $\varphi(\omega,t)$, $f(\omega,t)\in C^\infty(\Omega\times R^1)$, $\operatorname{Im}\varphi\equiv 0$, $f=0$ при $|t|>\delta>0$ и $\varphi'_t\neq 0$ при $|t|\leqslant\delta$. Тогда*

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}t^{-1}f(\omega,t)\,e^{i\varphi(\omega,t)\lambda}\,dt=\alpha\pi i f(\omega,0)\,e^{i\varphi(\omega,0)\lambda}+F(\omega,\lambda),$$

где $\alpha=\operatorname{sign}\varphi'_t(\omega,0)$, и для любых j, $N<\infty$ и любого дифференциального оператора $P(\omega,\partial/\partial\omega)$ на Ω с ограниченными коэффициентами существует такая константа $C(N,j,P)<\infty$, что при $\lambda>1$

$$\left|P\left(\omega,\frac{\partial}{\partial\omega}\right)\frac{d^j}{d\lambda^j}F(\omega,\ \lambda)\right|<C(N,j,P)\,\lambda^{-N}.\tag{17}$$

Доказательство. Так как $\varphi'_t\neq 0$, то в интересующем нас интеграле Q можно сделать замену $\varphi(\omega,t)-\varphi(\omega,0)=\tau$, после чего он станет равен

$$Q=\alpha e^{i\varphi(\omega,0)\lambda}\left[\text{v. p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tau^{-1}g(\omega,\tau)e^{i\tau\lambda}\,d\tau\right],\ g\in C^\infty,\ g(\omega,0)=f(\omega,0).$$

Далее, пусть $h=h(\tau)\in C^\infty_0$, $h(\tau)=1$ при $|\tau|<\delta/2$. Очевидно, функ-

ция

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau^{-1} [g(\omega, \tau) - g(\omega, 0)]\, h(\tau)\, e^{i\tau\lambda}\, d\tau$$

и любые ее производные убывают при $\lambda\to\infty$ быстрее λ^{-N} при любом N. Значит,

$$Q = \alpha f(\omega, 0)\, e^{i\varphi(\omega, 0)\lambda} \left[\text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} \tau^{-1} h(\tau)\, e^{i\tau\lambda}\, d\tau\right] + F_1,$$

где для F_1 имеет место оценка (17). Остается доказать, что функция

$$F_2 = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{|\tau|>\varepsilon} \tau^{-1} h(\tau)\, e^{i\tau\lambda}\, d\tau - \pi i$$

обладает оценкой (17). Подставим в последнюю формулу вместо πi выражение

$$\pi i = -\lim_{\varepsilon\to+0} \int_{l_\varepsilon} z^{-1} e^{iz\lambda}\, dz,$$

где l_ε — полуокружность $|z|=\varepsilon$, $\operatorname{Im} z>0$ в комплексной плоскости $z=\tau+i\zeta$ с направлением по часовой стрелке на ней. Получим, что

$$F_2 = \int_{l} z^{-1} h(z)\, e^{iz\lambda}\, dz,$$

где контур l состоит из полуокружности $l_{\delta/2}$ и лучей $|\tau|>\delta/2$, $\zeta=0$, а функция $h(z)$ продолжена в область $|z|<\delta/2$ единицей. Интегрируя по частям, получаем для F_2 оценку (17). ■

Доказательство теоремы 5. Очевидно, если гипоэллиптический оператор $P(i\partial/\partial x)$ удовлетворяет условиям 1—3 (или 1, 2), то при достаточно малом $\delta>0$ и $|t|<\delta$ оператор $[T(i\partial/\partial x)-t]P_1(i\partial/\partial x)$ также удовлетворяет этим условиям. При этом если $S_j(t)$, $1\leqslant j\leqslant\varkappa$, — связные поверхности, на которых $T(\sigma)=t$, а $\sigma^j(\omega, t)$ $(\sigma^{\varkappa+j}(\omega, t))$ — точки на $S_j(t)$, в которых вектор $\mu_j\nabla T(\sigma)$ параллелен ω и совпадает с ним по направлению (противоположно направлен), то точки $\sigma^s(\omega, t)$, $1\leqslant s\leqslant 2\varkappa$, гладко зависят от своих аргументов. Пусть $\mu_s(\omega, t)=\langle\sigma^s(\omega, t), \omega\rangle$.

Обозначим через U_j окрестность поверхности S_j, заметаемую поверхностями $S_j(t)$, $t\in(-\delta, \delta)$. Уменьшив (если нужно) δ, можно добиться того, чтобы области U_j попарно не пересекались. Пусть $h_j(\sigma)\in C^\infty_0(R^n)$, $h_j(\sigma)=0$ при $\sigma\overline{\in} U_j$, $h_j(\sigma)=1$ при тех $\sigma\in U_j$, для которых $|T(\sigma)|<\delta/2$. Тогда

$$\mathscr{E}_\mu(x) = (2\pi)^{-n} \sum_{j=1}^{\varkappa} \left[\text{v.p.} \int_{U_j} \frac{h_j(\sigma)}{P(\sigma)} e^{-i\langle\sigma, x\rangle}\, d\sigma - \pi i \mu_j \int_{S_j} \frac{e^{-i\langle\sigma, x\rangle}\, dS}{P_1(\sigma)|\nabla T(\sigma)|}\right] +$$

$$+ F^{-1}[(1-\textstyle\sum h_j)\, E_\mu],$$

где F^{-1} — оператор обратного преобразования Фурье. Интегралы по U_j запишем в виде повторных, интегрируя сначала по поверхности $S_j(t)$, а затем по t. Очевидно, $d\sigma = dSdl$, где dl — элемент длины нормали к $S_j(t)$. Так как сдвигу по нормали к S_j на dl отвечает изменение $T(\sigma)$ на величину $dT = |\nabla T| dl$, то $d\sigma = |\nabla T|^{-1} dSdt$. Таким образом, если

$$\Phi_j(t, \omega, r) = -i\mu_j (2\pi)^{1-n} \int\limits_{S_j(t)} \frac{h_j(\sigma)\, e^{-i(\sigma, x)}}{P_1(\sigma)\,|\nabla T(\sigma)|}\, dS,$$

то

$$\mathscr{E}_\mu(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\varkappa} \left[\frac{-\mu_j}{\pi i} \text{v.p.} \int\limits_{-\delta}^{\delta} t^{-1} \Phi_j(t, \omega, r)\, dt + \Phi_j(0, \omega, r) \right] +$$

$$+ F^{-1} [(1 - \sum h_j) E_\mu]. \tag{18}$$

Асимптотика функций Φ_j при $r \to \infty$ получена в гл. I (теорема 9 гл. I и замечание 2 к ней):

$$\Phi_j = e^{-i\mu_j(\omega, t) r} \left[\sum_{l=0}^{N} a_{j,l}(\omega, t)\, r^{\frac{1-n}{2} - l} + O(r^{\frac{-1-n}{2} - N}) \right] +$$

$$+ e^{-i\mu_{\varkappa+j}(\omega, t) r} \left[\sum_{l=0}^{N} a_{\varkappa+j,l}(\omega, t)\, r^{\frac{1-n}{2} - l} + O(r^{\frac{-1-n}{2} - N}) \right], \tag{19}$$

где N — любое, функции $a_{s,l}(\omega, t)$ бесконечно дифференцируемо зависят от ω и t, и остаточные члены вместе со всеми своими производными по ω, r и t убывают равномерно по ω и t при $r \to \infty$. При этом

$$a_{j,0}(\omega, 0) = -i\mu_j (2\pi)^{\frac{1-n}{2}} |k_j(\omega)|^{-\frac{1}{2}} [P_1(\sigma^j(\omega)) |\nabla T(\sigma^j(\omega))|]^{-1} e^{-i\gamma_j \pi/4}. \tag{20}$$

где $\gamma_j = -\delta_j(n-1)$ — разность между числом положительных и отрицательных главных кривизн поверхности S_j в точке $\sigma^j(\omega)$. Очевидно, формулы (20) и (16) совпадают.

Подставим разложения (19) в правую часть формулы (18) и применим к интегралам от каждого члена указанного разложения лемму 5, а к интегралам, содержащим остаточные члены разложения, — лемму 4. Получим, что при $r \to \infty$

$$\mathscr{E}_\mu = \sum_{s=1}^{2\varkappa} d_s\, e^{-i\mu_s(\omega, 0) r} \left[\sum_{l=0}^{N} a_{s,l}(\omega, 0)\, r^{\frac{1-n}{2} - l} \right] + O(r^{\frac{1-n}{2} - N}) +$$

$$+ F^{-1} [(1 - \sum h_j) E_\mu], \tag{21}$$

где $d_s = \frac{1}{2} \left[1 + \hat{\mu}_s \operatorname{sign} \frac{\partial \mu_s}{\partial t}(\omega, 0) \right]$ и $\hat{\mu}_s = \mu_s$ при $s < \varkappa$, $\hat{\mu}_s = \mu_{s-\varkappa}$ при $s > \varkappa$.

Поскольку в формуле (21) N — любое, и равенство (21) можно почленно дифференцировать по x любое число раз, то из (21) будет следовать утверждение теоремы 5, если мы покажем, что $d_s=1$ при $s<\varkappa$, $d_s=0$ при $s>\varkappa$ и последнее слагаемое $v(x)$ в правой части формулы (21), а также все его производные убывают при $r\to\infty$ быстрее r^{-M} при любом M.

Так как $T(\sigma^s(\omega, t))\equiv t$, то, продифференцировав это тождество по t, получим

$$<\nabla T(\sigma^s(\omega, t)),\ \partial\sigma^s(\omega, t)/\partial t> = 1. \tag{22}$$

Первый сомножитель в этом скалярном произведении пропорционален ω. Точнее, из определения точек $\sigma^s(\omega, t)$ следует, что

$$\widehat{\mu}_s\nabla T(\sigma^s(\omega, t)) = c_s(t)\omega,$$

где $c_s(t)>0$ при $s<\varkappa$ и $c_s(t)<0$ при $s>\varkappa$. Подставляя это равенство в (22), получаем, что

$$\langle\partial\sigma^s(\omega, t)/\partial t, \omega\rangle = \widehat{\mu}_s[c_s(t)]^{-1}.$$

Так как левая часть последнего соотношения равна $\partial\mu_s(\omega, t)/\partial t$, то отсюда следует нужное соотношение для d_s.

Наконец, заметим, что при любом k

$$F^{-1}\{(\Delta_\sigma)^k[(1-\sum h_j)E_\mu]\} = (-|x|^2)^k v(x), \tag{23}$$

где Δ_σ — оператор Лапласа по переменным σ. Из (4) получаем, что функция, стоящая в фигурных скобках, при достаточно больших k суммируема. Значит, ее обратное преобразование Фурье ограничено. Поскольку k можно взять как угодно большим, из (23) следует, что $v(x)$ убывает на бесконечности быстрее r^{-M} при любом M. Также оцениваются и производные от v. ∎

Пусть, как и раньше, гипоэллиптический оператор $P(i\partial/\partial x)$ удовлетворяет условиям 1—3, а $\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_\varkappa)$ — вектор с компонентами $\mu_j=\pm 1$, определяющий выбор фундаментального решения $\mathcal{E}_\mu(x)$ (формула (13)) и задающий ориентацию поверхностей S_j с помощью вектора нормали $\mu_j\nabla T(\sigma)$. Через $\mu_j(\omega)$ обозначаются функции, определенные в формуле (14), через Ω — единичная сфера в R^n. Обозначим через W^μ пространство обобщенных функций, представимых в виде суммы $\varkappa$ слагаемых

$$u = \sum_{j=1}^{\varkappa} u_j(x), \tag{24}$$

для которых в окрестности бесконечности имеют место оценки

$$|u_j(x)| < Cr^{\frac{1-n}{2}},\quad \left|\frac{\partial u_j(x)}{\partial r} + i\mu_j(\omega)u_j(x)\right| < Cr^{\frac{-1-n}{2}}. \tag{25}$$

Обозначим через $\Phi_R[u]$ интеграл

$$\Phi_R[u] = \frac{1}{R} \int_{R<r<2R} |u(x)|^2 \, dx. \tag{26}$$

Через $\widehat{W}^\mu$ обозначим пространство функций, представимых в виде (24) так, что при $R \to \infty$

$$\Phi_R[u_j] < C, \ \Phi_R\left[\frac{\partial u_j}{\partial r} + i\mu_j(\omega) u_j\right] = o(1). \tag{27}$$

Очевидно, $W^\mu \subset \widehat{W}^\mu$. Принадлежность функции u к пространству W^μ или $\widehat{W}^\mu$ означает, что она представима в виде суммы $\varkappa$ сферических волн, каждая из которых распространяется со своей частотой $\mu_j(\omega)$, зависящей от направления $\omega = x/r$. Из теоремы 5 следует, что функция $\mathscr{E}_\mu(x)$, а также любые ее производные принадлежат пространству W^μ.

Теорема 6. *Пусть $P(i\partial/\partial x)$ — гипоэллиптический оператор, удовлетворяющий условиям 1—3, и $f(x)$ — произвольная (может быть, обобщенная) функция с компактным носителем. Тогда уравнение (11) имеет и притом единственное решение в любом из пространств W^μ и $\widehat{W}^\mu$. Это решение $u_\mu \in W^\mu \subset \widehat{W}^\mu$ равно*

$$u_\mu(x) = \mathscr{E}_\mu(x) * f(x) \tag{28}$$

и имеет при $r \to \infty$ следующее равномерное по ω асимптотическое разложение

$$u_\mu(x) \sim \left[\sum_{j=1}^{\varkappa} e^{-i\mu_j(\omega) r} \sum_{l=0}^{\infty} c_{jl}(\omega) r^{\frac{1-n}{2} - l}\right], \tag{29}$$

где $c_{jl} \in C^\infty(\Omega)$, причем разложение (29) допускает почленное дифференцирование по x любое число раз.

В следующем параграфе будут получены априорные оценки для решений u_μ, а также будут рассмотрены уравнения, носитель правой части которых не компактен. Прежде чем приступать к доказательству теоремы 6, докажем следующую лемму.

Лемма 6. *Пусть $\xi = \xi(x)$ — непрерывно-дифференцируемая функция в R^n с компактным носителем и $v(x) = u(x) * \xi(x)$. Тогда если $|u(x)| < Cr^{-\alpha}$ при $r \to \infty$, то такую же оценку имеет $v(x)$. Если функция $u(x)$ обладает оценками (25) или (27), то такие же оценки справедливы для $v(x)$.*

Доказательство. Первое утверждение леммы совершенно очевидно. Далее, пусть функция u обладает оценками (25). Тогда из первого утверждения леммы 6 следует, что при $r \to \infty$

$$|v| < Cr^{\frac{1-n}{2}}, \ \left|\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\mu_j(\omega) u\right) * \xi\right| < Cr^{\frac{-1-n}{2}}. \tag{30}$$

Но

$$(\mu_j(\omega)\,u) * \xi = \mu_j(\omega)\,v + \int\limits_D [\mu_j(\tilde{\omega}) - \mu_j(\omega)]\,u\,(x - x_0)\,\xi\,(x_0)\,dx_0, \tag{31}$$

где $\tilde{\omega}$ — угловые координаты точки $x-x_0$, $D=\operatorname{supp}\xi$. Так как множество D ограничено, то $|\mu_j(\tilde{\omega})-\mu_j(\omega)|<Cr^{-1}$ при $r\to\infty$. Отсюда и из первой оценки (30) следует, что второе слагаемое в правой части формулы (31) имеет порядок $O(r^{(-1-n)/2})$ при $r\to\infty$, т. е.

$$(\mu_j(\omega)\,u) * \xi = \mu_j(\omega)\,v + O(r^{\frac{-1-n}{2}}),\ r\to\infty. \tag{32}$$

Совершенно аналогично, представляя $\partial u/\partial r$ в виде $\Sigma\omega_k\partial u/\partial x_k$, можно получить, что

$$\frac{\partial u}{\partial r} * \xi = \frac{\partial v}{\partial r} + O(r^{\frac{-1-n}{2}}),\ r\to\infty.$$

Это вместе с (32) и второй из оценок (30) доказывает справедливость для v второй из оценок (25). Аналогично доказывается, что функция v обладает оценками (27), если они справедливы для функции u. ■

Напомним, что если $p=(p_1, \ldots, p_n)$ — вектор с целочисленными неотрицательными коэффициентами, то через D^p обозначается оператор

$$D^p = (i)^{|p|}\frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1}\cdot\ldots\cdot\partial x_n^{p_n}},\ |p| = \Sigma p_i. \tag{33}$$

Доказательство теоремы 6. Существование. Так как f — обобщенная функция с компактным носителем, то она имеет конечный порядок [51], т. е. существует такое $m<\infty$ и такие непрерывно-дифференцируемые функции $f_p(x)$, $p=(p_1, \ldots, p_n)$, с компактным носителем, что $f(x) = \sum\limits_{|p|\leqslant m} D^p f_p(x)$. Значит, функция u_μ, определенная формулой (28) и являющаяся решением уравнения (11), равна

$$u_\mu = \sum_{|p|\leqslant m} D^p\,\mathscr{E}_\mu(x) * f_p(x). \tag{34}$$

Так как $D^p\mathscr{E}_\mu \in W^\mu$, то из леммы 6 следует, что $u_\mu \in W^\mu \subset \widehat{W}^\mu$. С помощью первого утверждения леммы 6 и полученного в теореме 5 асимптотического разложения для $D^p\mathscr{E}_\mu$ легко проверяется, что для функции (34) справедливо разложение (29).

Единственность. Так как $W^\mu\subset\widehat{W}^\mu$, то достаточно доказать единственность решения уравнения (11) в пространстве

$\widehat{W}^{\mu}$. Пусть $u(x) \in \widehat{W}^{\mu}$ — решение однородного уравнения (11), а $\mathscr{E}(x)$ — какое-нибудь фундаментальное решение уравнения $P^*(i\partial/\partial x)\mathscr{E}(x) = \delta(x)$, где P^* — оператор, формально сопряженный к P. Пусть Ω_r — сфера, B_r — шар в R^n радиуса r с центром в начале координат и $\Omega_1 = \Omega$. Интегрируя по частям, получаем следующее равенство, которому нетрудно придать строгий смысл:

$$\int_{B_r} \left[P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u\right]\overline{\mathscr{E}(x-x_0)}\,dx =$$

$$= \int_{B_r} u\,\overline{P^*\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathscr{E}(x-x_0)}\,dx + \int_{\Omega_r} M[u(x), \overline{\mathscr{E}(x-x_0)}]\,d\Omega_r, \quad (35)$$

где $M[u, v]$ — некоторая (определяемая неоднозначно) билинейная форма относительно $u(x)$, $v(x)$ и их производных до порядка $m-1$, где m — порядок оператора P. Точнее,

$$M[u, v] = \sum_{|p|+|q| \leq m-1} f_{p,q}(\omega)\,[D^p u(x)]\,[D^q v(x)], \quad f_{p,q} \in C^{\infty}(\Omega). \quad (36)$$

Так как $P^*(i\partial/\partial x) = \bar{P}(i\partial/\partial x)$, то для любого фундаментального решения $\mathscr{E}(x)$ оператора $P(i\partial/\partial x)$ функция $\overline{\mathscr{E}(-x)}$ будет фундаментальным решением оператора $P^*(i\partial/\partial x)$. Таким образом, из (35) при $|x_0| < r$ получаем

$$u(x_0) = -\int_{\Omega_r} M[u(x), \mathscr{E}_{\mu}(x_0 - x)]\,d\Omega_r.$$

Обозначим через $\xi = \xi(r)$ какую-нибудь бесконечно дифференцируемую неотрицательную функцию, равную нулю при $r < 1$ и $r > 2$ и такую, что $\xi(r) \not\equiv 0$ и $\xi(r) < 1$. Умножим последнее равенство на $\xi(r/R)$, проинтегрируем по r от R до $2R$ и результат поделим на $\int_R^{2R} \xi(r/R)\,dr = R\int_1^2 \xi(r)\,dr$:

$$u(x_0) = \frac{c}{R}\int_{R<r<2R} \xi\left(\frac{r}{R}\right) M[u(x), \mathscr{E}_{\mu}(x_0 - x)]\,dx.$$

Отсюда и из (36) будет следовать теорема единственности, если мы покажем, что для произвольных p, q и функции $f(\omega) \in C^{\infty}(\Omega)$

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R}\int_{R<r<2R} \xi\left(\frac{r}{R}\right) f(\omega)\,D^p u(x)\,D^q \mathscr{E}_{\mu}(x_0 - x)\,dx = 0. \quad (37)$$

Пусть $g \in C_0^{\infty}(R^n)$, $g = 1$ в некоторой окрестности начала координат, $\mathscr{E}$ — какое-нибудь фундаментальное решение оператора $P(i\partial/\partial x)$. Так как в силу гипоэллиптичности оператора P функ-

ция $\mathscr{E}$ бесконечно дифференцируема вне начала координат [120], то $(1-g)\mathscr{E}\in C^\infty(R^n)$ и, значит, $h=P(i\partial/\partial x)[(1-g)\mathscr{E}]\in C^\infty_0(R^n)$. Покажем, что для решений однородного уравнения (11) справедливо представление $u=u*h$ (см. [120]). Так как функция $g\mathscr{E}$ имеет компактный носитель, то $P(i\partial/\partial x)(g\mathscr{E})*u=g\mathscr{E}*P(i\partial/\partial x)u=0$. Значит, $u=u*P(i\partial/\partial x)\mathscr{E}=u*h$. Следовательно, $D^p u=u*D^p h$, и из леммы 6 следует, что

$$D^p u\in\widehat{W}^\mu, \text{ т. е. } D^p u=\sum_{m=1}^{\varkappa}\psi_m(x), \text{ где при } R\to\infty$$

$$\Phi_R[\psi_m]<C,\ \Phi_R\left[\frac{\partial\psi_m}{\partial r}+i\mu_m(\omega)\psi_m\right]=o(1). \tag{38}$$

Из теоремы 5 вытекает, что $D^q\mathscr{E}_\mu(x-x_0)\in W^\mu$, т. е.

$$D^q\mathscr{E}_\mu(x_0-x)=\sum_{k=1}^{\varkappa}\varphi_k(x), \text{ где при } r\to\infty$$

$$|\varphi_k(x)|<Cr^{\frac{1-n}{2}},\quad \left|\frac{\partial\varphi_k(x)}{\partial r}+i\mu_k(-\omega)\varphi_k(x)\right|<Cr^{-\frac{1+n}{2}}. \tag{39}$$

Обозначим через E множество точек $\omega\in\Omega$, для которых найдутся такие k и m, что $\mu_k(-\omega)=-\mu_m(\omega)$. Из определения функций $\mu_j(\omega)$ следует, что множество E имеет $(n-1)$-мерную меру нуль. Пусть $V_\varepsilon\subset\Omega$ — открытое на Ω множество, содержащее E, мера которого (поверхностная) равна ε. Пусть $D_\varepsilon=\Omega\setminus V_\varepsilon$, $V^R_\varepsilon=\{x:\omega\in V_\varepsilon,\ R<r<2R\}$, $D^R_\varepsilon=\{x:\omega\in D_\varepsilon,\ R<r<2R\}$.

Используя только первые из оценок (38), (39) и ограниченность функций f, ξ, получаем

$$\left|\frac{1}{R}\int_{V^R_\varepsilon}\xi\left(\frac{r}{R}\right)f(\omega)\,D^p u(x)\,D^q\mathscr{E}_\mu(x_0-x)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C}{R}\int_{V^R_\varepsilon}|D^p u|\cdot|D^q\mathscr{E}_\mu|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C}{R}\left[\int_{V^R_\varepsilon}|D^p u|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_{V^R_\varepsilon}|D^q\mathscr{E}_\mu(x_0-x)|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C}{\sqrt{R}}\{\Phi_R[D^p u]\}^{\frac{1}{2}}\left[\int_{V^R_\varepsilon}r^{1-n}\,dx\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant C\sqrt{\varepsilon}. \tag{40}$$

Теперь равенство (37) и, значит, теорема 6 будут доказаны, если мы покажем, что для любых двух функций φ_k и ψ_m, обла-

дающих оценками (38), (39), любой $f(\omega)\in C^\infty(\Omega)$ и при любом фиксированном $\varepsilon>0$ справедливо равенство

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\int_{D_\varepsilon^R}\xi\left(\frac{r}{R}\right)f(\omega)\,\varphi_k(x)\,\psi_m(x)\,dx=0. \qquad (41)$$

Так как

$$|\mu_k(-\omega)+\mu_m(\omega)|>C(\varepsilon)>0 \text{ при } \omega\in D_\varepsilon, \qquad (42)$$

то из оценок (38), (39) следует, что при $R\to\infty$

$$\left|\frac{1}{R}\int_{D_\varepsilon^R}\xi\left(\frac{r}{R}\right)f(\omega)\left[\frac{1}{\mu_k(-\omega)+\mu_m(\omega)}\cdot\frac{\partial\varphi_k(x)}{\partial r}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{i\mu_k(-\omega)\varphi_k(x)}{\mu_k(-\omega)+\mu_m(\omega)}\right]\psi_m(x)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_1(\varepsilon)}{R}\int_{D_\varepsilon^R}r^{-\frac{1+n}{2}}|\psi_m(x)|\,dx\leqslant\frac{C_1(\varepsilon)}{R}\int_{R<r<2R}r^{-\frac{1+n}{2}}|\psi_m(x)|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_1(\varepsilon)}{R}\left[\int_{R<r<2R}r^{-1-n}\,dx\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_{R<r<2R}|\psi_m(x)|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}=o(1).$$

Аналогично, при $R\to\infty$

$$\left|\frac{1}{R}\int_{D_\varepsilon^R}\xi\left(\frac{r}{R}\right)f(\omega)\,\varphi_k(x)\left[\frac{1}{\mu_k(-\omega)+\mu_m(\omega)}\cdot\frac{\partial\psi_m(x)}{\partial r}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{i\mu_m(\omega)\psi_m(x)}{\mu_k(-\omega)+\mu_m(\omega)}\right]dx\right|=o(1).$$

Из последних двух оценок, учитывая, что $\xi(1)=\xi(2)=0$, получаем при $R\to\infty$

$$\frac{1}{R}\int_{D_\varepsilon^R}\xi\left(\frac{r}{R}\right)f(\omega)\,\varphi_k(x)\,\psi_m(x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{R}\int_{D_\varepsilon^R}\xi\left(\frac{r}{R}\right)f(\omega)\,\frac{\mu_k(-\omega)\,\varphi_k(x)}{\mu_k(-\omega)+\mu_m(\omega)}\,\psi_m(x)\,dx+$$

$$+\frac{1}{R}\int_{D_\varepsilon^R}\xi\left(\frac{r}{R}\right)f(\omega)\,\frac{\mu_m(\omega)\,\psi_m(x)}{\mu_k(-\omega)+\mu_m(\omega)}\,\varphi_k(x)\,dx=$$

$$= \frac{i}{R} \int\limits_{D_\varepsilon^R} \frac{\xi(r/R) f(\omega)}{\mu_k(-\omega)+\mu_m(\omega)} \frac{\partial}{\partial r} [\varphi_k \psi_m]\, dx + o(1) =$$

$$= \frac{-i}{R} \int\limits_{D_\varepsilon^R} r^{1-n} \frac{\partial}{\partial r} \left[\xi\left(\frac{r}{R}\right) r^{n-1} \right] \times$$

$$\times \frac{f(\omega)}{\mu_k(-\omega)+\mu_m(\omega)} \varphi_k(x)\, \psi_m(x)\, dx + o(1). \qquad (43)$$

Так как $|\xi'(r)| < C$, то $\left| \frac{\partial}{\partial r} \xi\left(\frac{r}{R}\right) \right| < \frac{C}{R}$. Отсюда следует, что при $R < r < 2R$ и $R \to \infty$

$$\left| r^{1-n} \frac{\partial}{\partial r} \left[\xi\left(\frac{r}{R}\right) r^{n-1} \right] \right| < \frac{C}{R}. \qquad (44)$$

С помощью (42), (44) можно показать, что первое слагаемое в правой части равенства (43) имеет порядок $O(R^{-1})$ при $R \to \infty$. Делается это так же, как была получена оценка (40). Это доказывает справедливость равенства (41). ■

Пусть теперь гипоэллиптический оператор $P(i\partial/\partial x)$ удовлетворяет только условиям 1 и 2.

Назовем точку ω единичной сферы Ω *особой*, если существует такое j и такая точка $\sigma \in S_j$, в которой вектор нормали к S_j параллелен ω и полная кривизна поверхности S_j равна нулю. В противном случае *точку* ω *назовем неособой*. Очевидно, множество $V_0 \subset \Omega$ особых точек замкнуто и имеет $(n-1)$-мерную меру нуль. Связные компоненты множества $\Omega \setminus V_0$ назовем *неособыми областями*. Для любой неособой области V и точки $\omega \in \bar{V}$ на поверхности $S = \bigcup S_j$ существует конечное число точек $\sigma^s = \sigma^s(\omega)$, $1 \leqslant s \leqslant \varkappa_V$, в которых вектор нормали $\mu_j \nabla T(\sigma)$, задающий ориентацию поверхности S_j, параллелен вектору ω и совпадает с ним по направлению, и конечное число точек $\sigma^s = \sigma^s(\omega)$ $\varkappa_V < s \leqslant \widehat{\varkappa}_V$, в которых векторы $\mu_j \nabla T(\sigma)$ и ω противоположно направлены, причем $\varkappa_V$, $\widehat{\varkappa}_V$ не зависят от $\omega \in V$, а точки $\sigma^s(\omega)$, $1 \leqslant s \leqslant \widehat{\varkappa}_V$, бесконечно дифференцируемо зависят от ω (при правильной нумерации). Как и раньше, пусть $\mu_s(\omega) = \langle \sigma^s(\omega), \omega \rangle$, γ_s — разность между числом положительных и отрицательных главных кривизн, $k_s(\omega)$ — полная кривизна поверхности S в точке $\sigma^s(\omega)$.

Нетрудно проследить за рассуждениями, которые привели к доказательству теоремы 5, и убедиться в том, что они без каких-либо изменений переносятся на тот случай, когда оператор $P(i\partial/\partial x)$ не удовлетворяет условию 3, но $\omega \in V$. Таким образом, справедлива

Теорема 5′. *Пусть гипоэллиптический оператор* $P(i\partial/\partial x)$ *удовлетворяет условиям* 1 *и* 2, *а* V — *неособая область. Тогда его фундаментальные решения, построенные в теореме* 4, *имеют при*

$\omega \in V$ *и* $r \to \infty$ *следующие асимптотические разложения:*

$$\mathscr{E}_\mu \sim \sum_{s=1}^{\varkappa_V} e^{-i\mu_s(\omega)r} \sum_{l=0}^{\infty} a_{sl}(\omega)\, r^{\frac{1-n}{2}-l}, \tag{45}$$

где $a_{sl} \in C^\infty(V)$ *и*

$$a_{s0}(\omega) = -i\,(2\pi)^{\frac{1-n}{2}} \frac{e^{-i\gamma_s \pi/4}}{\sqrt{|k_s(\omega)|}\,\frac{\partial P}{\partial \nu}(\sigma^s(\omega))}.$$

Разложение (45) *допускает почленное дифференцирование по* x *любое число раз, причем разложение для* $\mathscr{E}_\mu$ *и его производных равномерны по* ω, *когда* ω *принадлежит любому компакту в* V.

В случае, когда гипоэллиптический оператор $P(i\partial/\partial x)$ удовлетворяет только условиям 1 и 2, обозначим через W^μ пространство обобщенных функций $u(x)$ таких, что $\Phi_R[u] < C$ при $R \to \infty$, и для любой неособой области V функция u представима в виде суммы $u(x) = \sum_{s=1}^{\varkappa_V} u_s(x)$ так, что для любого компакта $K \subset V$ при $r \to \infty$, $\omega \in K$ и $1 \leqslant s \leqslant \varkappa_V$ справедливы оценки

$$|u_s(x)| < C(K)\, r^{\frac{1-n}{2}}, \quad \left|\frac{\partial u_s(x)}{\partial r} + i\,\mu_s(\omega)\, u_s(x)\right| < C(K)\, r^{-\frac{1+n}{2}}. \tag{46}$$

Пространство $\widehat{W}^\mu$ определяется точно так же, только оценки (46) заменяются на следующие:

$$\Phi_R[u_s] < C, \ \Phi_R\left[\frac{\partial u_s}{\partial r} + i\,\mu_s(\omega)\, u_s\right] = o(1), \ R \to \infty. \tag{46'}$$

Теорема 6′. *Пусть гипоэллиптический оператор удовлетворяет условиям* 1 *и* 2, *а функция* f *(может быть, обобщенная) имеет компактный носитель. Тогда уравнение* (11) *имеет и притом единственное решение в любом из пространств* $W^\mu \subset \widehat{W}^\mu$. *Эти решения равны* $u_\mu = \mathscr{E}_\mu * f$ *и имеют при* $\omega \in V$ *и* $r \to \infty$, *где* V — *неособая область, асимптотические разложения, аналогичные разложению* (45) *для фундаментальных решений (только с другими коэффициентами).*

Доказательство. В работе [51] доказано, что фундаментальные решения, построенные в теореме 4, имеют при $R \to \infty$ оценку $\Phi_R[u] < C$. После установления этого факта существование решения уравнения (11) в условиях теоремы 6′ доказывается так же, как в теореме 6. Для получения утверждения о единственности решения нужно повторить рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 6, отнеся к множеству E также множество $V_0 \subset \Omega$ особых точек. Далее, нужно представить множество D_ε в виде объединения неособых областей V_m и при оценке ин-

теграла (37) по D^R, записать этот интеграл в виде суммы интегралов по $V^R{}_m = \{x: \omega \in V_m,\ R < r < 2R\}$ и исследовать каждый из них в отдельности точно так же, как раньше исследовалась вся сумма. ■

Правые части с некомпактным носителем. Напомним, что через $H^s = H^s(R^n)$, обозначаются пространства С. Л. Соболева, а через F^{-1} — оператор обратного преобразования Фурье (см. гл. VI). Обозначим через α_n константу $\alpha_n = [(n+1)/2]+2$ при $n \neq 3$, $\alpha_n = 5$ при $n=3$, где $[a]$ — наибольшее целое число, не превосходящее a.

Теорема 7. *Пусть $P(i\partial/\partial x)$ — гипоэллиптический оператор, удовлетворяющий условиям* 1 *и* 2, *а правая часть в уравнении* (11) *обладает следующими свойствами*:

$$\int\limits_{R^n} (1+|x|)^{\alpha_n} |f(x)|\, dx < \infty \tag{47}$$

и $f \in H^1(R^n)$, если оператор P не эллиптичен, или $f \in H^{1-2m}(R^n)$, если оператор P эллиптичен. Тогда уравнение (11) *имеет и притом единственное решение в пространстве $\widehat{W}^\mu$. Это решение u_μ равно*

$$u_\mu = F^{-1}[E_\mu(\sigma)\tilde{f}(\sigma)],$$

где $E_\mu(\sigma)$ дается формулой (13).

Доказательство. Из (47) следует, что функция $\tilde{f}(\sigma)$ (и ее производные до порядка α_n включительно) непрерывна. Значит, произведение $E_\mu \tilde{f} \in S'$ имеет смысл. Очевидно, функция u_μ будет решением уравнения (11) (см. доказательство теоремы 4). Поскольку утверждение о единственности решения содержится в теореме 5', остается только показать, что $u_\mu \in \widehat{W}^\mu$.

Асимптотическое поведение функции u_μ при $r \to \infty$ исследуется точно так же, как и фундаментального решения $\mathscr{E}_\mu$. Пусть сначала оператор P удовлетворяет условиям 1—3. Тогда для u_μ будет иметь место аналог формулы (18):

$$u_\mu = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\varkappa}\left[-\frac{\mu_j}{\pi i}\,\text{v. p.}\int\limits_{-\delta}^{\delta} t^{-1}\Phi_j\, dt + \Phi_j|_{t=0}\right] + v,$$

где

$$v = F^{-1}[(1-\Sigma h_j) E_\mu \tilde{f}],$$

$$\Phi_j(t, \omega, r) = -i\mu_j(2\pi)^{1-n}\int\limits_{S_j(t)} \frac{h_j(\sigma)\tilde{f}(\sigma)e^{-i\langle\sigma,x\rangle}}{P_1(\sigma)|\nabla T(\sigma)|}\, dS.$$

Если $\tilde{f}(\sigma) \in C^\infty$, то асимптотика функций Φ_j при $r \to \infty$ дается теоремой 9 гл. I и замечанием 2 к ней и имеет тот же вид, что и в случае $\tilde{f}(\sigma) \equiv 1$, т. е. соответствующее разложение дается формулой (19), в которой коэффициенты зависят от f. Бесконечная

дифференцируемость функции $\tilde{f}$ была необходима для получения с помощью метода стационарной фазы полного асимптотического разложения исследуемых интегралов. Однако метод стационарной фазы можно использовать и при изучении интегралов от быстро осциллирующих функций, имеющих конечную гладкость. При этом, если фаза подынтегрального выражения (в $(n-1)$-мерном интеграле) бесконечно дифференцируема и точки стационарной фазы невырождены, а предэкспонента принадлежит $C^{\alpha_n - 1}$, то метод стационарной фазы позволяет написать главный член асимптотики интеграла. Так как $\tilde{f}(\sigma) \in C^{\alpha_n}$, то это дает нам главный член асимптотики функции Φ_j и ее производной по t. Таким образом,

$$\Phi_j = r^{\frac{1-n}{2}} e^{-i\mu_j(\omega, t)r} (a_j(\omega, t) + b_j(\omega, t, r)) +$$

$$+ r^{\frac{1-n}{2}} e^{-i\mu_{\varkappa+j}(\omega, t)r} (a_{\varkappa+j}(\omega, t) + b_{\varkappa+j}(\omega, t, r)), \ 1 \leqslant j \leqslant \varkappa, \qquad (48)$$

где $a_s \in C^1(\Omega \times R^1)$ и существует такая функция $\beta(r)$, что $\beta(r) \to 0$ при $r \to \infty$ и $|b_s| + |b'_{s_t}| < \beta(r)$, $0 \leqslant s \leqslant 2\varkappa$. Поскольку производные по x можно вносить под знак интеграла, определяющего функцию Φ_j, то асимптотическое разложение (48) можно почленно дифференцировать любое число раз по x (с сохранением оценок остаточных членов). Поэтому и следующие ниже асимптотические разложения, опирающиеся на формулу (48), можно дифференцировать по x.

Обозначим через Ψ_j функцию, которая получится, если в разложении (48) для Φ_j зафиксировать значение $t=0$ в коэффициентах a_s, b_s, $0 \leqslant s \leqslant 2\varkappa$. Поскольку функции Ψ_j бесконечно дифференцируемо зависят от t, то выражения

$$-\frac{\mu_j}{\pi i} \text{ v. p.} \int_{-\delta}^{\delta} t^{-1} \Psi_j \, dt + \Psi_j|_{t=0}$$

можно исследовать с помощью лемм 4, 5 точно так же, как это делалось при доказательстве теоремы 5 для аналогичных выражений с функцией Φ_j. Значит,

$$u_\mu = \sum_{j=1}^{\varkappa} r^{\frac{1-n}{2}} e^{-i\mu_j(\omega)r} (a_j(\omega) + O(r^{-1})) +$$

$$+ r^{\frac{1-n}{2}} \sum_{s=1}^{2\varkappa} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-i\mu_s(\omega, t)r} [\tilde{a}_s(\omega, t) + \tilde{b}_s(\omega, t, r)] \, dt + v, \qquad (49)$$

где

$$v = F^{-1}[(1 - \Sigma h_j(\sigma)) \tilde{f}(\sigma) E_\mu(\sigma)],$$

$$\tilde{a}_s(\omega, t) = c_s t^{-1}[a_s(\omega, t) - a_s(\omega, 0)], \quad c_s = \text{const},$$
$$\tilde{b}_s(\omega, t, r) = c_s t^{-1}[b_s(\omega, t, r) - b_s(\omega, 0, r)].$$

Очевидно, функции $\tilde{a}_s$ непрерывны и $|\tilde{b}_s| < c_s\beta(r)$. Поскольку $(\mu_s)'_t \neq 0$ при $|t| < \delta$, то интеграл в формуле (49) стремится к нулю при $r \to \infty$. А так как слагаемые, стоящие под знаком первой суммы в правой части равенства (49), удовлетворяют условиям (27), то теорема 7 будет доказана, если мы покажем, что

$$\Phi_R[v] + \Phi_R\left[\frac{\partial v}{\partial r}\right] \to 0$$

при $R \to \infty$. Для этого, в свою очередь, достаточно показать, что $v \in H^1(R^n)$. Поскольку $P(\sigma) \neq 0$ при $\sigma \in \operatorname{supp}[1 - \Sigma h_j(\sigma)]$, то последнее включение является следствием оценки (4) в случае не эллиптического оператора P и следствием леммы 2, когда оператор P эллиптичен. Переход к случаю операторов, не удовлетворяющих условию 3, делается точно так же, как и при доказательстве теоремы 6′. ■

Более общие правые части будут рассмотрены в следующем параграфе.

Системы уравнений. Все полученные в этой главе результаты автоматически оказываются справедливыми и в случае систем уравнений, если определитель системы удовлетворяет тем условиям, которые раньше накладывались на оператор (а также в несколько более общем случае, о чем будет сказано ниже). Для доказательства сделанного утверждения можно дословно повторить в случае систем приведенные выше рассуждения. Чтобы не делать этого, укажем простенький прием, позволяющий сводить системы уравнений с постоянными коэффициентами к одному уравнению. Он основан на формуле Крамера, согласно которой

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) = A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) =$$
$$= \left[\det P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] I, \tag{50}$$

где $P(i\partial/\partial x)$ — матрица из дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, матрица A получается транспонированием матрицы, составленной из алгебраических дополнений элементов матрицы P, I — единичная матрица.

Из формулы (50) следует, что если $\mathscr{E}(x)$ — фундаментальное решение оператора $\det P$, то матрица $\widehat{\mathscr{E}} = A(i\partial/\partial x)\mathscr{E}$ будет фундаментальной для матричного оператора $P(i\partial/\partial x)$. Таким образом, асимптотические свойства фундаментальной матрицы $\widehat{\mathscr{E}}$ являются следствием полученных выше асимптотических свойств $\mathscr{E}(x)$ и его производных. Решение неоднородной системы $P(i\partial/\partial x)v = f$ можно найти с помощью формулы (50) следующим образом. Находим вектор u, компоненты которого u_i являются

решениями уравнения $(\det P) u_l = f_l$, где f_l — соответствующая компонента вектора f. Тогда вектор $v = A(i\partial/\partial x) u$ будет решением указанной системы. Так же просто к случаю одного уравнения сводятся теоремы о единственности решения системы. Действительно, если $P(i\partial/\partial x) u = 0$, то, применив к этому равенству матрицу $A(i\partial/\partial x)$, получим, что компоненты u_l вектора u удовлетворяют уравнению $(\det P) u_l = 0$.

Если все элементы матрицы $A(\sigma)$ и многочлен $\det P(\sigma)$ имеют общий делитель $R(\sigma)$, так что

$$A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) = R\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) B\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

$$\det P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) = R\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

где $R(i\partial/\partial x)$, $Q(i\partial/\partial x)$ — дифференциальные операторы, $B(i\partial/\partial x)$ — матричный оператор, то вместо формулы (50) можно использовать формулу

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) B\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) = B\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) = Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) I,$$

т. е. в приведенных выше рассуждениях можно заменить A и $\det P$ на B и Q соответственно. При рассмотрении систем уравнений будем обозначать через W^μ, $\widehat{W}^\mu$ пространства вектор-функций, каждая компонента которых принадлежит указанному пространству, построенному по оператору $Q(i\partial/\partial x)$. Здесь $Q(\sigma) = [\det P(\sigma)]/R(\sigma)$, т. е. $Q(\sigma) = \det P(\sigma)$ при $R \equiv 1$. Таким образом, доказана

Теорема 8. *Утверждения теорем 4—6, 5′, 6′ будут справедливы в случае матричного оператора $P(i\partial/\partial x)$, если предположения этих теорем выполнены для оператора $Q(i\partial/\partial x)$. При этом функции E_μ, $\mathcal{E}_\mu$, a_{jl} будут матричными, ψ, u, u_μ, f и c_{jl} — векторами, в формуле* (13) *надо заменить $\psi(\sigma)$ на $B(\sigma)\psi(\sigma)$, а в формуле* (16) *заменить $[\partial P/\partial \nu]^{-1}$ на $B[\partial Q/\partial \nu]^{-1}$.*

Пример. Упругие колебания однородной изотропной среды, вызванные периодической силой $-f(x)\exp(\widehat{i\omega t})$, описываются следующей системой уравнений

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u \equiv \mu\,\Delta u + (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} u + \rho\widehat{\omega}^2 u = f,\ x \in R^3, \quad (51)$$

где $u = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор смещения, ρ — плотность среды, λ и μ — коэффициенты Ламэ, характеризующие свойства среды. Определитель характеристической матрицы системы равен

$$\det P(\sigma) = (-\mu|\sigma|^2 + \rho\widehat{\omega}^2)^2 [-(\lambda + 2\mu)|\sigma|^2 + \rho\widehat{\omega}^2].$$

Он не удовлетворяет условию 1. Однако к рассматриваемой системе применима теорема 8, так как

$$A\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) = (\mu\,\Delta + \rho\,\widehat{\omega}^2)\,[(\lambda + 2\mu)\,\Delta - (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div} + \rho\widehat{\omega}^2]$$

и многочлен $-\mu|\sigma|^2+\rho\widehat{\omega}^2$ является общим делителем элементов матрицы $A(\sigma)$ и многочлена $\det P(\sigma)$. Значит,

$$Q(\sigma) = (-\mu|\sigma|^2 + \rho\widehat{\omega}^2)\,[-(\lambda+2\mu)\,|\sigma|^2 + \rho\,\widehat{\omega}^2].$$

Этот многочлен удовлетворяет условиям 1—3, причем в зависимости от выбора ориентации поверхности $Q(\sigma)=0$ имеем: $\mu_1(\omega)=\pm k$, $\mu_2(\omega)=\pm\varkappa$, где $k=\widehat{\omega}\sqrt{\rho/(\lambda+2\mu)}$, $\varkappa=\widehat{\omega}\sqrt{\rho/\mu}$. Из теорем 6, 8 вытекает существование и единственность решения системы (51) в любом из четырех построенных пространств W^{μ}. Выделенные решения имеют при $r\to\infty$ вид суммы двух сферических волн:

$$u=c_1(\omega)\,r^{-1}\,e^{\pm ikr}+c_2(\omega)\,r^{-1}\,e^{\pm i\varkappa r}+O(r^{-2}),\ c_1, c_2\in R^3. \tag{52}$$

Заметим, что полученные выше результаты дают также асимптотику при $r\to\infty$ решений системы упругости в случае неизотропной среды. Точно так же, как и система упругости, изучается система Максвелла, если записать ее в виде шести уравнений первого порядка для шестимерного вектора (E, H), где E и H — векторы электрической и магнитной напряженности.

Наконец, пусть правая часть системы (11) равна $G(i\partial/\partial x)\varphi$, где G — матрица из дифференциальных операторов, φ — вектор с компактным носителем, и все элементы матрицы $B(\sigma)\,G(\sigma)$ и многочлен $Q(\sigma)$ имеют общий делитель $H(\sigma)$, так что $B(\sigma)\,G(\sigma)=B_1(\sigma)\,H(\sigma)$, $Q(\sigma)=Q_1(\sigma)\,H(\sigma)$. Тогда построенные выше принадлежащие пространствам W^{μ} решения системы (11) можно получить в виде $u=B_1(i\partial/\partial x)\,v$, где компоненты вектора v являются решениями уравнения $Q_1(i\partial/\partial x)\,v_i=\varphi_i$. Это позволяет получить решения системы, представимые в виде суммы только тех волн, которые соответствуют нулям многочлена $Q_1(\sigma)$. Например, для системы (51) это позволяет получить решения вида (52) с $c_2(\omega)\equiv 0$, если $f=\nabla\varphi$, и с $c_1(\omega)\equiv 0$, если $f=\operatorname{rot}\psi$.

§ 3. Принцип предельного поглощения

Пусть, как и в предыдущем параграфе, $P(i\partial/\partial x)$ — гипоэллиптический оператор, удовлетворяющий условиям 1 и 2. В этом параграфе будет сформулирован и обоснован для оператора P принцип предельного поглощения, позволяющий получить принадлежащие пространствам W^{μ} решения u_{μ} уравнения (11) предельным переходом из решений u_{ε} близких уравнений, однозначно разрешимых в пространстве обобщенных функций S'. Будут получены также оценки скорости сходимости u_{ε} к u_{μ} и априорные оценки для u_{μ}. Не все пространства W^{μ} одинаково интересны с физической точки зрения. Решения u_{μ}, принадлежащие двум наиболее важным из пространств W^{μ}, будут дополнительно исследоваться в последующих главах.

Напомним, что вектор $\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_{\varkappa})$, компоненты которого равны ± 1, определяет ориентацию поверхностей S_j с помощью

выбора на S_j вектора нормали $\nu=\mu_j\nabla T(\sigma)|\nabla T(\sigma)|^{-1}$. После выбора ориентации поверхностей S_j однозначно определены пространства $\widehat{W}^\mu$ и $W^\mu\subset\widehat{W}^\mu$ (см. § 2). Кроме того, каждому вектору μ однозначно соответствует фундаментальное решение $\mathscr{E}_\mu$ оператора P (см. формулу (13) и теорему 4), которые, согласно теоремам 5, 5′, принадлежат пространству W^μ.

Будем говорить, что *оператор* $Q(\varepsilon, i\partial/\partial x)$ при $0<\varepsilon\leqslant\tilde{\varepsilon}$ *соответствует вектору* μ, если

1) коэффициенты оператора Q гладко зависят от ε, $0\leqslant\varepsilon\leqslant\tilde{\varepsilon}$;

2) существует такая константа $q>0$, что $\mu_j \operatorname{Re} Q(\varepsilon, \sigma)\geqslant q>0$ при $\sigma\in S_j$, $0\leqslant\varepsilon\leqslant\tilde{\varepsilon}$, $1\leqslant j\leqslant\varkappa$;

3) оператор

$$P_\varepsilon^Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)=\left[T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)+i\varepsilon Q\left(\varepsilon, i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]P_1\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) \quad (53)$$

при $0<\varepsilon\leqslant\tilde{\varepsilon}$ является гипоэллиптическим или эллиптическим, в зависимости от того, гипоэллиптичен или эллиптичен оператор $P(i\partial/\partial x)$, причем

$$P_\varepsilon^Q(\sigma)\neq 0,\ 0<\varepsilon\leqslant\tilde{\varepsilon},\ \sigma\in R^n. \quad (54)$$

Отметим, что соотношение (54) вытекает из предыдущих условий, если коэффициенты многочлена $Q(\varepsilon, \sigma)$ вещественны или $\tilde{\varepsilon}>0$ достаточно мало, оператор T эллиптичен, а порядок оператора Q не превосходит порядка оператора T.

В тех случаях, когда мы будем изучать уравнения с переменными коэффициентами, мы будем дополнительно включать в определение соответствия оператора Q вектору μ следующее требование: степень оператора Q должна не превосходить степени оператора T.

Лемма 7. *Для любого вектора* μ *существует оператор, соответствующий этому вектору.*

Доказательство. Пусть $R>0$ таково, что поверхности S_j находятся внутри шара $|\sigma|<R$. Возьмем любую непрерывную функцию $f(\sigma)$ в шаре $|\sigma|\leqslant R$, равную $3\mu_j$ при $\sigma\in S_j$, $1\leqslant j\leqslant\varkappa$. Приблизим ее при $|\sigma|\leqslant R$ многочленом $Q_1(\sigma)$ с точностью до единицы. Тогда многочлен $Q(\sigma)=(|\sigma|/R)^{2k}+Q_1(\sigma)$, где $2k$ больше степеней многочленов $T(\sigma)$, $Q_1(\sigma)$, соответствует вектору μ. ■

Если оператор $Q(\varepsilon, i\partial/\partial x)$ соответствует некоторому вектору μ, то к оператору (53) применима теорема 1, и, значит, при любой финитной функции f уравнение

$$P_\varepsilon^Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u_\varepsilon(x)=f(x),\quad x\in R^n, \quad (55)$$

в пространстве обобщенных функций S' имеет и притом единственное решение. Это решение мы и обозначаем через $u_\varepsilon(x)$.

Принцип предельного поглощения для уравнения

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u=f,\ x\in R^n, \tag{56}$$

состоит в следующем: вместо того, чтобы искать условия на бесконечности, которые выделяют единственное решение уравнения (56), надо задать какой-нибудь оператор $Q(\varepsilon, i\partial/\partial x)$, соответствующий некоторому вектору μ, и под решением уравнения (56) понимать

$$u(x)=\lim_{\varepsilon\to+0} u_\varepsilon(x). \tag{57}$$

Оказывается, предел (57) существует, дает решение $u_\mu\in W^\mu$ уравнения (56) и не зависит от выбора оператора Q, отвечающего вектору μ.

Теорема 9. *Пусть гипоэллиптический оператор $P(i\partial/\partial x)$ удовлетворяет условиям 1 и 2 оператор $Q(\varepsilon, i\partial/\partial x)$ соответствует вектору μ, функция f (может быть, обобщенная) имеет компактный носитель. Тогда решение $u_\varepsilon\in S'$ уравнения* (55) *при $\varepsilon\to+0$ сходится в пространстве S' к принадлежащему W^μ решению u_μ уравнения* (56).

Доказательство. Нужно показать, что для любой функции $\varphi=\varphi(\sigma)\in S$

$$(\tilde{u}_\varepsilon(\sigma),\ \varphi(\sigma))\to(\tilde{u}_\mu(\sigma),\ \varphi(\sigma)) \quad \text{при} \quad \varepsilon\to+0.$$

Это соотношение после операции комплексного сопряжения с помощью равенства (13) и теорем 1, 4, 6, 6′ можно переписать в следующем виде:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{R^n}\frac{\psi(\sigma)\,d\sigma}{[T(\sigma)+i\varepsilon Q(\varepsilon,\ \sigma)]}=$$

$$=\text{v. p.}\int_{R^n}\frac{\psi(\sigma)}{T(\sigma)}\,d\sigma-\pi i\sum_{j=1}^{\varkappa}\mu_j\int_{S_j}\frac{\psi(\sigma)}{|\nabla T(\sigma)|}\,dS,$$

где $\psi(\sigma)=\tilde{f}(\sigma)\overline{\varphi(\sigma)}/P_1(\sigma)$. Так как функция f имеет компактный носитель, то $\tilde{f}\in C^\infty$ и все ее производные растут на бесконечности не быстрее некоторой фиксированной степени $|\sigma|$. А оператор P_1 в силу леммы 2 гипоэллиптичен и, значит, для него справедливы оценки (4). Значит, $\psi(\sigma)\in S$.

Пусть $U=\{\sigma:|T(\sigma)|<\delta\}$. Из оценки (4) для многочлена $T(\sigma)$ следует, что эта область ограничена. Возьмем $\delta>0$ настолько малым, чтобы были выполнены следующие три условия: 1) $|\nabla T(\sigma)|\neq0$ при $\sigma\in\bar{U}$ (напомним, что в силу леммы 2 $|\nabla T(\sigma|\neq0$ при $T(\sigma)=0$); 2) область U представима в виде объединения непересекающихся областей U_j, $1\leqslant j\leqslant\varkappa$, таких, что $S_j\subset\subset U_j$; 3) $\mu_j\operatorname{Re}Q(\varepsilon,\sigma)\geqslant q/2>0$ при $\sigma\in\bar{U}_j$, $0<\varepsilon<\tilde{\varepsilon}$, $1\leqslant j\leqslant\varkappa$. Оче-

видно, указанное δ существует. Пусть $h_j=h_j(\sigma)\in C^\infty{}_0(R^n)$, $\operatorname{supp} h_j\subset U_j$, $h_j(\sigma)=1$ при тех $\sigma\in U_j$, для которых $|T(\sigma)|<\delta/2$.

Если $V=\{\sigma:\sigma\in R^n,\ |T(\sigma)|>\delta/2\}$, то $1-\Sigma h_j=0$ при $\sigma\overline{\in} V$. А так как $P^Q{}_\varepsilon(\sigma)\neq 0$ при $0\leqslant\varepsilon\leqslant\tilde\varepsilon$ и $\sigma\in V$, то из теоремы Зайденберга — Тарского [49] следует существование таких не зависящих от ε и σ констант N и $C<\infty$, что

$$\left|\frac{1}{T(\sigma)+i\varepsilon Q(\varepsilon,\sigma)}\right|<C(1+|\sigma|^N),\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\tilde\varepsilon,\ \sigma\in V.$$

Поэтому по теореме Лебега, если $\psi\in S$, то

$$\int\limits_{R^n}(1-\Sigma h_j)\frac{\psi\,d\sigma}{T+i\varepsilon Q}\to\int\limits_{R^n}(1-\Sigma h_j)\frac{\psi}{T}\,d\sigma \text{ при } \varepsilon\to+0.$$

Таким образом, для доказательства теоремы 9 достаточно показать, что при любом j, $1\leqslant j\leqslant\varkappa$,

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{U_j}\frac{h_j\psi\,d\sigma}{T+i\varepsilon Q}=\text{v. p.}\int\limits_{U_j}\frac{h_j\psi\,d\sigma}{T}-\pi i\mu_j\int\limits_{S_j}\frac{h_j\psi}{|\nabla T|}\,dS. \tag{58}$$

Достаточно рассмотреть те j, для которых $\mu_j=1$, так как второй случай сводится к этому с помощью операции комплексного сопряжения. Итак, пусть $\mu_j=1$. В комплексной плоскости $\mathbf{C}$ с разрезом вдоль отрицательной части мнимой оси зафиксируем ветвь функции $\ln z$, $z\in\mathbf{C}$, условием $-\pi/2<\arg z<3\pi/2$. Тогда, поскольку $\operatorname{Re}Q(\varepsilon,\sigma)\geqslant q/2>0$ при $0\leqslant\varepsilon\leqslant\tilde\varepsilon$, $\sigma\in\bar U_j$, функция $\ln[T(\sigma)+i\varepsilon Q(\varepsilon,\sigma)]$ будет однозначно определена при этих ε и σ. В частности, положив $\varepsilon=0$, получим, что

$$\ln T(\sigma)=\ln|T(\sigma)|+\pi i \quad\text{при}\quad T(\sigma)<0. \tag{59}$$

Пусть $\varepsilon<\delta$ и $U^\varepsilon{}_j=\{\sigma:\sigma\in U_j,\ |T(\sigma)|>\varepsilon\}$. Обозначим через $\Gamma_\pm$ и $\Gamma^\varepsilon{}_\pm$ — части границы области $U^\varepsilon{}_j$, на которых $T(\sigma)=\pm\delta$ и $T(\sigma)=\pm\varepsilon$ соответственно. Тогда, так как $h_j\in C^\infty{}_0(U_j)$ и $|\nabla T(\sigma)|\neq 0$ при $\sigma\in\bar U_j$, то

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{U_j}\frac{h_j\psi}{T+i\varepsilon Q}\,d\sigma=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{U_j}h_j\psi\left\langle\frac{\nabla_\sigma(T-i\varepsilon\bar Q)}{|\nabla_\sigma(T+i\varepsilon Q)|^2},\ \nabla_\sigma\ln(T+i\varepsilon Q)\right\rangle d\sigma=$$

$$=-\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{U_j}\ln(T+i\varepsilon Q)\operatorname{div}\left[h_j\psi\frac{\nabla_\sigma(T-i\varepsilon\bar Q)}{|\nabla_\sigma(T+i\varepsilon Q)|^2}\right]d\sigma=$$

$$=-\int\limits_{U_j}\ln T\operatorname{div}\left(h_j\psi\frac{\nabla_\sigma T}{|\nabla_\sigma T|^2}\right)d\sigma. \tag{60}$$

С другой стороны, те же рассуждения с учетом того, что на $\Gamma^{\varepsilon}_{\pm}$ единичный вектор внешней по отношению к области U^{ε}_j нормали равен $\mp\nabla T(\sigma)/|\nabla T(\sigma)|$, приводят к равенству

$$\int\limits_{U_j^{\varepsilon}} \frac{h_j \psi}{T}\, d\sigma = -\int\limits_{U_j^{\varepsilon}} \ln T \operatorname{div}\left(h_j \psi \frac{\nabla_\sigma T}{|\nabla_\sigma T|^2}\right) d\sigma -$$

$$-\int\limits_{\Gamma_+^{\varepsilon}} \ln T \frac{h_j \psi}{|\nabla_\sigma T|}\, dS + \int\limits_{\Gamma_-^{\varepsilon}} \ln T \frac{h_j \psi}{|\nabla_\sigma T|}\, dS.$$

Отсюда и из равенства (59) получаем

$$\text{v. p.} \int\limits_{U_j} \frac{h_j \psi}{T}\, d\sigma =$$

$$= -\int\limits_{U_j} \ln T \operatorname{div}\left(h_j \psi \frac{\nabla_\sigma T}{|\nabla_\sigma T|^2}\right) d\sigma + \pi i \int\limits_{S_j} \frac{h_j \psi}{|\nabla_\sigma T|}\, dS.$$

Вместе с (60) это доказывает справедливость (58). ■

Характер сходимости u_ε к u_μ можно уточнить, если функция f принадлежит пространству Соболева — Слободецкого. Введем некоторые обозначения. Через $H^s{}_\gamma = H^s{}_\gamma(R^n)$ обозначим пространство Соболева — Слободецкого с весом $(1+|x|^2)^{-\gamma/2}$, т. е.

$$\|u\|_{s,\gamma} = \|u\|_{H^s_\gamma} = \|(1+r^2)^{-\gamma/2} u\|_{H^s}. \tag{61}$$

Следующие несколько определений принадлежат Хермандеру [116, 117]. Пусть $P(i\partial/\partial x)$ — произвольный оператор с постоянными коэффициентами и $P(\sigma)$ — его характеристический многочлен. Через $\tilde{P}(\sigma)$ обозначим функцию

$$\tilde{P}(\sigma) = \Big[\sum_{\alpha} |P^{(\alpha)}(\sigma)|^2\Big]^{1/2},$$

где $P^{(\alpha)}(\sigma)$ — производные от $P(\sigma)$ и суммирование распространяется на всевозможные $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. *Оператор* $R(i\partial/\partial x)$ *называется более слабым, чем* $P(i\partial/\partial x)$, если $|R(\sigma)/\tilde{P}(\sigma)| < C$, $\sigma \in R^n$. Для гипоэллиптических операторов при любых α справедлива оценка $|P^{(\alpha)}(\sigma)|/(|P(\sigma)|+1) < C$, $\sigma \in R^n$ (для эллиптических операторов эта оценка является следствием леммы 1). Поэтому в случае, когда P гипоэллиптичен, оператор R будет слабее P тогда и только тогда, когда

$$|R(\sigma)|/(|P(\sigma)|+1) < C, \quad \sigma \in R^n. \tag{62}$$

Для эллиптического оператора P операторами слабее его будут любые операторы, порядок которых не превосходит порядка оператора P.

Будем говорить, что *оператор* $Q(\varepsilon, i\partial/\partial x)$, коэффициенты которого непрерывно зависят от ε, $0<\varepsilon<\tilde{\varepsilon}$, *слабее гипоэллиптического оператора* $P(i\partial/\partial x)$, если при всех ε, $0<\varepsilon<\tilde{\varepsilon}$

$$|Q(\varepsilon, \sigma)|/[|P(\sigma)|+1]<C, \quad \sigma\in R^n. \tag{63}$$

Теорема 10. *Пусть гипоэллиптический оператор* $P(i\partial/\partial x)$ *удовлетворяет условиям* 1 *и* 2, $s\in R^1$, *функция* $f\in H^s(R^n)$ *и имеет компактный носитель, а оператор* $R(i\partial/\partial x)$ *слабее* $P(i\partial/\partial x)$. *Тогда для принадлежащих пространству* W^μ *решений* u_μ *уравнения* (56) *при любом* $\gamma>1$ *справедлива оценка*

$$\left\| R\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u_\mu\right\|_{s,\gamma} \leqslant C_\gamma \|f\|_{s,-\gamma}, \tag{64}$$

где константа C_γ *не зависит от* f.

Если оператор $Q(\varepsilon, i\partial/\partial x)$ *слабее оператора* $T(i\partial/\partial x)$ *и соответствует вектору* μ, *а* $u_\varepsilon\in S'$ — *решение уравнения* (55), *то при любом* $\theta\in[0, 1]$ *и* $\gamma>1+\theta$

$$\left\| R\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)[u_\varepsilon - u_\mu]\right\|_{s,\gamma} \leqslant C_{\gamma,\theta}\,\varepsilon^\theta \|f\|_{s,-\gamma}, \ 0<\varepsilon\leqslant\tilde{\varepsilon}, \tag{65}$$

где константа $C_{\gamma,\theta}$ *не зависит от* f *и* ε.

Замечание. Из доказательства теоремы 10 будет видно, что в оценках (64), (65) можно заменить оператор $R(i\partial/\partial x)$ на $|P(i\partial/\partial x)|+1$, где $|P(i\partial/\partial x)|$ — оператор (псевдодифференциальный), который каждой функции $u(x)$ ставит в соответствие $F^{-1}[|P(\sigma)|\tilde{u}(\sigma)]$, где F^{-1} — оператор обратного преобразования Фурье.

Прежде чем доказывать теорему 10, получим некоторые следствия из нее. Обозначим через $P^{s,\gamma}$ пространство обобщенных функций $u\in S'$, для которых $[|P(i\partial/\partial x)|+1]u\in H^s{}_\gamma$. Положим

$$\|u\|_{P^{s,\gamma}} = \left\|\left[\left|P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right|+1\right]u\right\|_{H^s_\gamma}.$$

В силу леммы 1, если P — эллиптический оператор, то $P^{s,\gamma}=H^{s+2m}_\gamma$. Пусть правая часть уравнения (56) принадлежит пространству $H^s_{-\gamma}$ с некоторыми $s\in R^1$ и $\gamma>1$. Будем говорить, что решение u_μ уравнения (56) удовлетворяет *условиям излучения в слабом смысле* (и обозначать это будем так: $u_\mu\in\overline{W}^\mu$), если $u_\mu\in P^{s,\gamma}$ и существует последовательность функций $f_m\in H^s_{-\gamma}$ с компактными носителями, сходящаяся к f в пространстве $H^s_{-\gamma}$ при $m\to\infty$ и такая, что

$$\|u_m - u_\mu\|_{P^{s,\gamma}} \to 0 \text{ при } m\to\infty,$$

где u_m — принадлежащее W^μ решение уравнения (56) с правой частью f_m. В силу теоремы 6 функция u_m определяется по f_m однозначно.

Напомним, что в силу теоремы 1 уравнение (55) имеет и притом единственное решение $u_\varepsilon \in S'$ для любой функции $f \in H^s_{-\gamma}$. Из теоремы 10, очевидно, следует

Теорема 11. *Пусть* $P(i\partial/\partial x)$ — *гипоэллиптический оператор, удовлетворяющий условиям* 1 *и* 2, $s \in R^1$, $\gamma > 1$, $f \in H^s_{-\gamma}$ *и оператор* $R(i\partial/\partial x)$ *слабее* $T(i\partial/\partial x)$. *Тогда для любой последовательности функций* $f_m \in H^s_{-\gamma}$ *с компактными носителями такой что* $f_m \to f$ *в* $H^s_{-\gamma}$ *при* $m \to \infty$, *решения* $u_m \in W^\mu$ *уравнения* $Pu_m = f_m$ *сходятся при* $m \to \infty$ *в пространстве* $P^{s,\gamma}$ *к решению* $u_\mu \in \overline{W}^\mu$ *уравнения* (56). *Это решение не зависит от выбора последовательности* f_m *и обладает оценками* (64), (65).

Замечания. 1. Обозначим через $A^\mu : H^s_{-\gamma} \to P^{s,\gamma}$ оператор, переводящий функции $f \in H^s_{-\gamma}$ в решение $u_\mu \in W^\mu$ уравнения (56). Из теоремы 10 следует, что оператор A^μ определен на функциях $f \in H^s_{-\gamma}$ с компактным носителем и ограничен. Так как функции с компактным носителем образуют в $H^s_{-\gamma}$ плотное множество, то оператор A^μ можно продолжить на все пространство $H^s_{-\gamma}$. За этим продолжением мы сохраним то же обозначение: A^μ. Тогда пространство $\overline{W}^\mu$ совпадает с областью значений оператора A^μ, и при $f \in H^s_{-\gamma}$ решением $u_\mu \in \overline{W}^\mu$ уравнения (56), удовлетворяющим условиям излучения в слабом смысле, является функция $A^\mu f$.

2. Из формулы для функции u_μ, приведенной в формулировке теоремы 7, следует, что если функция f удовлетворяет условиям этой теоремы, то решение $u_\mu \in \overline{W}^\mu$ уравнения (56), удовлетворяющее условиям излучения в слабом смысле, принадлежит пространству $\widehat{W}^\mu$.

Для удобства дальнейших ссылок приведем формулировку теоремы 11 в эллиптическом случае.

Теорема 12. *Пусть* $P(i\partial/\partial x)$ — *эллиптический оператор порядка* $2m$, *удовлетворяющий условиям* 1 *и* 2, $s \in R^1$, $\gamma > 1$ *и* $f \in H^s_{-\gamma}$. *Тогда для любой последовательности функций* $f_k \in H^s_{-\gamma}$ *с компактными носителями, сходящейся в простр*[*ан*]*стве* $H^s_{-\gamma}$ *к* f *при* $k \to \infty$, *решения* $u_k \in W^\mu$ *уравнения* $Pu_k = f_k$ *сходятся при* $k \to \infty$ *в пространстве* H^{s+2m}_γ *к решению* $u_\mu \in \overline{W}^\mu$ *уравнения* (56). *Это решение не зависит от выбора последовательности* f_k *и*

$$\| u_\mu \|_{s+2m,\gamma} \leqslant C_\gamma \| f \|_{s,-\gamma}.$$

Если $Q(\varepsilon, i\partial/\partial x)$ — *оператор порядка не выше* $2m$, *соответствующий вектору* μ, *и* u_ε — *решение уравнения* (55), *то при любых* $\theta \in [0, 1]$ *и* $\gamma > 1 + \theta$

$$\| u_\varepsilon - u_\mu \|_{s+2m,\gamma} \leqslant C_{\gamma,\theta}\, \varepsilon^\theta \| f \|_{s,-\gamma}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \tilde{\varepsilon}.$$

Для доказательства теоремы 10 нам понадобятся следующие два утверждения, первое из которых абсолютно очевидно и приводится лишь для удобства дальнейших ссылок.

Лемма 8. *Пусть оператор* $A: H^{s_1} \to H^{s_2}$ *имеет вид*

$$Af(x) = \int_{R^n} a(\sigma)\tilde{f}(\sigma) e^{-i\langle\sigma,x\rangle}\,d\sigma. \tag{66}$$

Тогда

$$\|A\|^2 = \sup[(1+|\sigma|^2)^{s_2-s_1}|a(\sigma)|^2].$$

Пусть $f \in H^s$ и имеет компактный носитель и, значит, $\tilde{f}(\sigma) \in C^\infty$. Обозначим через $v_{j,\varepsilon}$ функцию

$$v_{j,\varepsilon} = \int_{U_j} h_j(\sigma) \frac{\tilde{f}(\sigma)}{[T(\sigma)+i\varepsilon Q(\varepsilon,\sigma)]P_1(\sigma)} e^{-i\langle\sigma,x\rangle}\,d\sigma,\ 0<\varepsilon\leqslant\tilde{\varepsilon}, \tag{67}$$

где область $U_j \subset R^n$ и функция $h_j \in C_0^\infty(U_j)$ были определены при доказательстве теоремы 9.

Лемма 9. *Для любых* $s_1, s_2 \in R^1$, $s_2 \leqslant s$ *и* $\gamma > 1$

$$\|v_{j,\varepsilon}\|_{s_1,\gamma} \leqslant C_\gamma \|f\|_{s_2,-\gamma},\ 0<\varepsilon\leqslant\tilde{\varepsilon},$$

и существует такая функция v_j, *что при любом* $\theta \in [0, 1]$ *и* $\gamma > 1+\theta$

$$\|v_{j,\varepsilon} - v_j\|_{s_1,\gamma} \leqslant C_{\gamma,\theta}\varepsilon^\theta \|f\|_{s_2,-\gamma},\ 0<\varepsilon\leqslant\tilde{\varepsilon},$$

где константы C_γ, $C_{\gamma,\theta}$ *не зависят от* f *и* ε.

Доказательство. Пусть

$$w_{j,\varepsilon}(t,x) = \int_{U_j} \frac{h_j(\sigma)\tilde{f}(\sigma)}{P_1(\sigma)} e^{it\mu_j[T(\sigma)+i\varepsilon Q(\varepsilon,\sigma)]-i\langle\sigma,x\rangle}\,d\sigma,\ 0\leqslant\varepsilon\leqslant\tilde{\varepsilon}. \tag{68}$$

Так как $\mu_j \operatorname{Re} Q \geqslant q/2 > 0$ при $\sigma \in \bar{U}_j$, то $w_{j,\varepsilon}$ — бесконечно дифференцируемая функция своих аргументов, экспоненциально убывающая при $t\to\infty$, если $\varepsilon>0$, и

$$v_{j,\varepsilon}(x) = -i\mu_j \int_0^\infty w_{j,\varepsilon}(t,x)\,dt,\ 0<\varepsilon\leqslant\tilde{\varepsilon}. \tag{69}$$

Поскольку $|\nabla T| \neq 0$ при $\sigma \in \bar{U}_j$, то существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что $|\nabla(T+i\varepsilon Q)| \neq 0$ при $\sigma \in \bar{U}_j$ и $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$. Значит, при $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$

$$w_{j,\varepsilon} = \int_{U_j} \left\langle \frac{\nabla(T-i\varepsilon\bar{Q})}{it\mu_j|\nabla(T+i\varepsilon Q)|^2}, \nabla e^{it\mu_j(T+i\varepsilon Q)} \right\rangle \frac{h_j\tilde{f}}{P_1} e^{-i\langle\sigma,x\rangle}\,d\sigma =$$

$$= \frac{-1}{it\mu_j} \int_{U_j} e^{it\mu_j(T+i\varepsilon Q)} \operatorname{div}\left[\frac{h_j\tilde{f}e^{-i\langle\sigma,x\rangle}}{P_1|\nabla(T+i\varepsilon Q)|^2}\nabla(T-i\varepsilon\bar{Q})\right]d\sigma =$$

$$
= \frac{-1}{it\mu_j} \Big[\int\limits_{R^n} \langle -ix, K_\varepsilon(t,\sigma) \rangle \tilde{f}(\sigma) e^{-i\langle \sigma, x\rangle} d\sigma +
$$

$$
+ \int\limits_{R^n} \langle K_\varepsilon(t,\sigma), \widetilde{ixf} \rangle e^{-i\langle \sigma, x\rangle} d\sigma + \int\limits_{R^n} F_\varepsilon(t,\sigma) \tilde{f}(\sigma) e^{-i\langle \sigma, x\rangle} d\sigma \Big]. \tag{70}
$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\nabla \tilde{f}(\sigma) = \widetilde{ixf}$, и ввели обозначения:

$$
K_\varepsilon(t,\sigma) = \left[\frac{h_j}{P_1 |\nabla (T + i\varepsilon Q)|^2} e^{it\mu_j(T + i\varepsilon Q)} \right] \nabla (T - i\varepsilon \overline{Q}),
$$

$$
F_\varepsilon(t,\sigma) = e^{it\mu_j(T + i\varepsilon Q)} \operatorname{div} \left[\frac{h_j}{P_1 |\nabla (T + i\varepsilon Q)|^2} \nabla (T - i\varepsilon \overline{Q}) \right].
$$

Компоненты вектор-функции K_ε и функция F_ε равномерно ограничены (по модулю) при $\sigma \in U_j$, $t \geqslant 0$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ и равны нулю при $\sigma \overline{\in} U_j$. Значит, согласно лемме 8, операторы типа (66), в которых роль функции a играет F_ε или какая-либо из компонент вектора K_ε, являются ограниченными операторами из пространства H^{s_*} в H^{s_1}, и их норма не превосходит некоторой константы, не зависящей от t и ε. Поэтому из формулы (70) и того факта, что операторы умножения на функции $x_i/\sqrt{1+r^2}$ и $1/\sqrt{1+r^2}$ являются ограниченными операторами в пространствах H^s, следует, что при $t \geqslant 1$

$$
\| w_{j,\varepsilon} \|_{s_1,1} \leqslant C t^{-1} \| f \|_{s_*,-1}, \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0. \tag{71}
$$

Если в формуле (70) повторить несколько раз приведенную операцию интегрирования по частям, то те же рассуждения приведут к оценкам:

$$
\| w_{j,\varepsilon} \|_{s_1,\gamma} \leqslant C_\gamma t^{-\gamma} \| f \|_{s_*,-\gamma}, \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \quad \gamma = 2, 3, \ldots \tag{72}
$$

Далее, используя очевидное неравенство $1 - \exp(-t) < t^\theta$, справедливое при всех $t > 0$ и $\theta \in [0, 1]$, можно показать, что

$$
| F_\varepsilon(t,\sigma) - F_0(t,\sigma) | < C(\varepsilon t)^\theta, \quad t \geqslant 1, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.
$$

Аналогичная оценка имеет место и для компонент вектора K_ε. Поэтому для разности $w_{j,\varepsilon} - w_{j,0}$ справедлива оценка, аналогичная (71), с дополнительным сомножителем $(\varepsilon t)^\theta$ справа. Точно так же доказывается для разности $w_{j,\varepsilon} - w_{j,0}$ аналог оценки (72). Итак, при $t \geqslant 1$, $\theta \in [0, 1]$ и $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$

$$
\| w_{j,\varepsilon} - w_{j,0} \|_{s_1,l} \leqslant C_l (\varepsilon t)^\theta t^{-l} \| f \|_{s_*,-l}, \quad l = 1, 2, \ldots \tag{73}
$$

С другой стороны, непосредственно из формулы (68) и леммы 8 следует, что

$$
\| w_{j,\varepsilon} \|_{s_1} \leqslant C \| f \|_{s_*}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0,
$$

$$\|w_{j,\varepsilon}-w_{j,0}\|_{s_1}\leqslant C\varepsilon^{\theta}\|f\|_{s_2},\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0,\ \theta\in[0,1],$$

$$\|w_{j,\varepsilon}\|_{s_1}\leqslant Ce^{-q\varepsilon_0 t/2}\|f\|_{s_2},\ t\geqslant 0,\ \varepsilon_0<\varepsilon\leqslant\tilde{\varepsilon}.$$

Комбинируя последние три оценки и оценки (71)—(73), получаем, что при всех $t\geqslant 0$, $\theta\in[0,1]$ и $0<\varepsilon<\tilde{\varepsilon}$

$$\|w_{j,\varepsilon}\|_{s_1,\gamma}\leqslant C_\gamma(1+t)^{-\gamma}\|f\|_{s_2,-\gamma},\ \gamma=1,2,\ldots,$$

$$\|w_{j,\varepsilon}-w_{j,0}\|_{s_1,\gamma}\leqslant C_\gamma\,\varepsilon^{\theta}(1+t)^{\theta-\gamma}\|f\|_{s_2,-\gamma},\ \gamma=1,2,\ldots$$

Из теоремы об интерполяции [16] следует, что последние оценки справедливы при всех $\gamma\in R^1$, $\gamma\geqslant 1$, что вместе с (69) будет доказывать справедливость утверждения леммы 9, если v_j определить с помощью интеграла (69) от $w_{j,0}$. ■

Доказательство теоремы 10. Пусть области $U_j\subset R^n$ и функции $h_j\in C_0^\infty(R^n)$ те же, что были определены в ходе доказательства теоремы 9, и $g=1-\Sigma h_j$. Тогда

$$u_\varepsilon=F^{-1}\left\{\frac{g(\sigma)\tilde{f}(\sigma)}{[T(\sigma)+i\varepsilon Q(\varepsilon,\sigma)]P_1(\sigma)}\right\}+(2\pi)^{-n}\sum_{j=1}^{\varkappa}v_{j,\varepsilon}, \tag{74}$$

где функции $v_{j,\varepsilon}$ определены в формуле (67). Обозначим первое слагаемое в правой части формулы (74) через w_ε. Тогда, согласно определению нормы в пространстве H^s, имеем

$$\left\|R\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)w_0\right\|_s=\left\|\frac{(1+|\sigma|^2)^{s/2}R(\sigma)g(\sigma)\tilde{f}(\sigma)}{P(\sigma)}\right\|_{L_2}\leqslant$$

$$\leqslant\|f\|_s\sup_{\sigma\in R^n}\left|\frac{R(\sigma)g(\sigma)}{P(\sigma)}\right|=C\|f\|_s, \tag{75}$$

так как оператор R слабее P, а функция g равна нулю в окрестности нулей $P(\sigma)$. Аналогично,

$$\left\|R\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)(w_\varepsilon-w_0)\right\|_s\leqslant\|f\|_s\sup_{\sigma\in R^n}\left|R(\sigma)g(\sigma)\left[\frac{1}{P_\varepsilon^Q(\sigma)}-\frac{1}{P(\sigma)}\right]\right|=$$

$$=\varepsilon\|f\|_s\sup_{\sigma\in R^n}\left|\frac{R(\sigma)g(\sigma)Q(\varepsilon,\sigma)}{[T(\sigma)+i\varepsilon Q(\varepsilon,\sigma)]P(\sigma)}\right|\leqslant C\varepsilon\|f\|_s, \tag{76}$$

так как оператор R слабее P, а Q слабее T.

Очевидно, в формулах (75), (76) можно заменить операторы $R(i\partial/\partial x)$ на $|P(i\partial/\partial x)|$. Поэтому теорема 10 и замечание к ней вытекают из формул (74)—(76) и леммы 9. ■

Отметим, что с помощью приема, описанного в последнем пункте предыдущего параграфа, результаты этого параграфа также автоматически распространяются на системы уравнений.

Литературные указания, дополнения. Первый параграф содержит элементарные и хорошо известные результаты. Условия излучения впервые были выведены А. Зоммерфельдом (1912) для

оператора Гельмгольца (7). Принцип предельного поглощения для этого уравнения был сформулирован В. С. Игнатовским (1905), а принцип предельной амплитуды — А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским (1948); см. [105]. Ф. Реллих показал [194], что условия излучения (8), (9) для оператора Гельмгольца можно заменить на интегральные. Асимптотика на бесконечности некоторых решений для широкого класса систем уравнений была получена М. Лайтхиллом [145]. А. Г. Свешников [101, 102] нашел аналог условий излучения (парциальные условия излучения) и обосновал принцип предельного поглощения для оператора Гельмгольца в слое между двумя параллельными плоскостями и в цилиндре. Некоторые классы уравнений с постоянными коэффициентами рассматривались в работах [15, 197]. Принципы излучения и предельного поглощения для эллиптических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами и внешних краевых задач для них, а также для систем Максвелла и упругости исследовались в работах [144, 61, 62, 96, 122, 123, 125, 42, 43] (см. также следующую главу).

В работах автора [23, 25] условия излучения были получены для гипоэллиптических уравнений любого порядка от двух переменных, удовлетворяющих только условию 1 из § 2. Затем автором [24, 26] и, независимо, — В. В. Грушиным [50] эти результаты были распространены на уравнения, удовлетворяющие условиям 1—3 при $n>2$; Грушиным [51] был исследован также случай уравнений, не удовлетворяющих условию 3. Заметим, что условия излучения, полученные в [50, 51], отличаются по форме от рассматриваемых в этой главе.

Принцип предельного поглощения для рассматриваемого класса задач был сформулирован и обоснован автором в [26]. Предложенный автором принцип предельного поглощения, в котором задачи на непрерывном спектре рассматриваются как предельные в классе всех задач, отличается от изучавшегося ранее принципа, в котором возмущению подвергался только коэффициент при свободном члене уравнения. Такое обобщение позволило получить с помощью принципа предельного поглощения любое (а не только два, как это было раньше) из $2^{\varkappa}$ решений задачи, выделяемых условиями излучения. Для уравнений с постоянными коэффициентами в R^n автором дана также формулировка принципа предельной амплитуды [30, 32], полностью эквивалентная принципам излучения и предельного поглощения, т. е. выделяющая любое из уже отмеченных $2^{\varkappa}$ решений уравнения (этот результат в монографию не включен). В последующих главах продолжается изучение внешних задач и имеются дальнейшие ссылки.

Глава VIII

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ВО ВНЕШНОСТИ ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

В этой главе результаты, полученные в гл. VII, будут перенесены на эллиптические уравнения с переменными, достаточно быстро стабилизирующимися на бесконечности коэффициентами и на внешние краевые задачи для таких уравнений. В следующих двух главах будет продолжено изучение этих задач. Отметим сразу, что все полученные ниже результаты автоматически обобщаются на случай систем уравнений. Это обобщение осуществляется простой заменой в тексте слов «уравнение» на «система уравнений» и «функция» — на «вектор-функция».

§ 1. Разрешимость и априорные оценки решений внешних краевых задач

Если $s\in R^1$, то через $\{s\}$ обозначим наименьшее из целых чисел, не меньших s. Обозначим через $L_{s,\gamma}$ множество функций $h=h(x)$, все производные которых до порядка $\{|s|\}$ ведут себя как $o[(1+|x|^2)^{-\gamma}]$ при $|x|\to\infty$.

Будут рассматриваться эллиптические уравнения вида

$$P\left(x, i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)\equiv\left[P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)+R\left(x, i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]u(x)=f(x),$$
$$x\in R^n, \qquad (1)$$

где $P(i\partial/\partial x)$ — эллиптический оператор порядка $2m$, удовлетворяющий сформулированным в предыдущей главе условиям 1 и 2, а $R(x, i\partial/\partial x)$ — оператор порядка не выше $2m$ с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, принадлежащими пространству $L_{s,\gamma}$, а также внешние краевые задачи для этого уравнения:

$$\begin{cases} P\left(x, i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u\equiv\left[P\left(i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)+R\left(x, i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right]u(x)=f(x), \ x\in\Omega, \\ B_j\left(x, i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u\Big|_\Gamma=\varphi_j(x), \ 1\leqslant j\leqslant m. \end{cases} \qquad (2)$$

Здесь Ω — неограниченная область с компактной бесконечно гладкой границей Γ, B_j — операторы порядка m_j с бесконечно

дифференцируемыми коэффициентами и задача (2) эллиптична (т. е. оператор P правильно эллиптичен и выполнены условия Шапиро — Лопатинского; см. гл. VI). Заметим сразу, что все полученные ниже для задачи (2) результаты и их доказательства автоматически переносятся на случай уравнения (1). Если бы мы интересовались только уравнением (1), то доказательства некоторых из этих результатов можно было бы упростить.

Из наложенных на коэффициенты оператора R условий вытекает

Лемма 1. *Пусть $R(x, i\partial/\partial x)$ — оператор порядка $2m$ с коэффициентами, принадлежащими $L_{s,\gamma}$. Тогда оператор*

$$R\left(x,\ i\frac{\partial}{\partial x}\right): H_{\gamma}^{s+2m}(R^n) \to H_{-\gamma}^{s}(R^n) \tag{3}$$

ограничен. Если $\zeta=\zeta(t)\in C^{\infty}(R^1)$, $\zeta=1$ при $t>1$ и $\zeta=0$ при $t<0$, то

$$\left\|\zeta(r-d)\, R\left(x,\ i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\| \to 0 \text{ при } d\to\infty,\ r=|x|.$$

(Здесь и далее знаки γ и γ идентичны.)

Пространства $H^s{}_{\gamma}=H^s{}_{\gamma}(R^n)$ были определены в предыдущей главе. Так же определяются пространства $H^s{}_{\gamma}(\Omega)$:

$$\|u\|_{H_{\gamma}^{s}(\Omega)} = \|(1+r^2)^{-\gamma/2} u\|_{H^s(\Omega)}.$$

Через $H^s{}_{-\gamma}(\Omega, \Gamma)$ обозначим пространство

$$H_{-\gamma}^{s}(\Omega, \Gamma) = H_{-\gamma}^{s}(\Omega) \oplus \sum_{j=1}^{m} H^{s+2m-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Аналогично определялось пространство $H^s(\Omega, \Gamma)$. Через φ будем обозначать вектор $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$, через Ω_d — область

$$\Omega_d=\Omega\cap B_d,\quad B_d=\{x: x\in R^n, |x|<d\}. \tag{4}$$

Напомним, что $\overline{W}^{\mu}$ — подпространство функций из $H_{\gamma}^{s+2m}(R^n)$, удовлетворяющих условиям излучения в слабом смысле, а

$$A^{\mu}: H_{-\gamma}^{s}(R^n) \to H_{\gamma}^{s+2m}(R^n),\ \gamma>1, \tag{5}$$

— ограниченный оператор, переводящий функции $f\in H^s{}_{-\gamma}(R^n)$ в принадлежащие $\overline{W}^{\mu}$ решения уравнения $P(i\partial/\partial x)u=f$, $x\in R^n$ (см. теорему 12 и замечания к теореме 11 предыдущей главы).

Пусть $R_0<\infty$ таково, что Γ принадлежит шару (открытому) B_{R_0}. Существует [92] линейный ограниченный оператор (продолжения функций с сохранением гладкости)

$$l: H^{s+2m}(\Omega_{R_0}) \to H^{s+2m}(B_{R_0}) \tag{6}$$

такой, что $lu=u$ при $x\in\Omega_{R_0}$. Имеем

$$\|lu\|_{H^{s+2m}(B_{R_0})} \leqslant C\|u\|_{H^{s+2m}(\Omega_{R_0})}. \tag{7}$$

Продолжив функции из пространства $H_\gamma^{s+2m}(\Omega)$ в область $R^n\setminus\Omega$ с помощью оператора (6), получаем ограниченный оператор (продолжения)

$$l: H_\gamma^{s+2m}(\Omega)\to H_\gamma^{s+2m}(R^n), \tag{8}$$

за которым мы сохраним то же обозначение.

Через $\overline{W}^\mu(\Omega)$ обозначим пространство функций $u\in H_\gamma^{s+2m}(\Omega)$ таких, что $lu\in\overline{W}^\mu$. Поскольку функции $u\in H^{s+2m}(R^n)$ с компактным носителем принадлежат пространству $\overline{W}^\mu$, приведенное определение не зависит от выбора оператора l.

Теорема 1. *Пусть $P(i\partial/\partial x)$ — эллиптический оператор порядка $2m$, удовлетворяющий условиям 1 и 2, $R(x, i\partial/\partial x)$ — оператор порядка не выше $2m$, коэффициенты которого бесконечно дифференцируемы и принадлежат пространству $L_{s,\gamma}$. Пусть задача* (2) *эллиптична, $s>s^0=\max(-2m+m_j+1/2)$ и $\gamma>1$.*

Тогда при всех $(f, \varphi)\in H^s_{-\gamma}(\Omega, \Gamma)$, ортогональных некоторому конечномерному подпространству $L\subset H^s_{-\gamma}(\Omega, \Gamma)$, задача (2) *разрешима в пространстве $\overline{W}^\mu(\Omega)$. Однородная задача* (2) *имеет в $\overline{W}^\mu(\Omega)$ конечное число линейно независимых решений.*

Существуют такие не зависящие от (f, φ) константы $C=C(\gamma,s)$ и $\rho=\rho(\gamma, s)$, что для принадлежащих $\overline{W}^\mu(\Omega)$ решений u_μ задачи (2) *справедлива оценка*

$$\|u\|_{H_\gamma^{s+2m}(\Omega)}\leqslant C\Big[\|f\|_{H^s_{-\gamma}(\Omega)}+\sum_{j=1}^m\|\varphi_j\|_{H^{s+2m-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)}+ \\ +\|u_\mu\|_{H^s(\Omega_\rho)}\Big]. \tag{9}$$

Если однородная задача (2) *имеет в $\overline{W}^\mu(\Omega)$ только тривиальное решение или решение $u_\mu\in\overline{W}^\mu(\Omega)$ задачи* (2) *ортогонально с $H_\gamma^{s+2m}(\Omega)$ принадлежащим $\overline{W}^\mu(\Omega)$ решениям однородной задачи* (2), *то*

$$\|u_\mu\|_{H_\gamma^{s+2m}(\Omega)}\leqslant C\Big[\|f\|_{H^s_{-\gamma}(\Omega)}+\sum_{j=1}^m\|\varphi_j\|_{H^{s+2m-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)}\Big]. \tag{10}$$

Доказательство. Априорная оценка. Пусть $u_\mu\in\overline{W}^\mu(\Omega)$ — решение задачи (2), где $(f,\varphi)\in H^s_{-\gamma}(\Omega, \Gamma)$. Обозначим через $\hat{u}_\mu=\hat{u}_\mu(x)$ функцию lu_μ, где оператор l определен в формуле (8). Коэффициенты оператора $P(x, i\partial/\partial x)$ считаем продолженными произвольным образом с сохранением бесконечной дифференцируемости в область $R^n\setminus\Omega$. Тогда

$$P\left(x, i\frac{\partial}{\partial x}\right)\hat{u}_\mu=\hat{f},\ x\in R^n, \tag{11}$$

где в силу (7)

$$\|\hat{f}\|_{H^s_{-\gamma}(R^n)} \leqslant C[\|f\|_{H^s_{-\gamma}(\Omega)} + \|u\|_{H^{s+2m}(\Omega_{R_0})}]. \tag{12}$$

Перенесем функцию $R(x, i\partial/\partial x)\hat{u}_\mu$ в правую часть уравнения (11) и воспользуемся ограниченностью оператора (5). Учитывая (12), получим

$$\|u_\mu\|_{s+2m,\gamma} \leqslant C_\gamma[\|\hat{f}\|_{s,-\gamma} + \|R\hat{u}_\mu\|_{s,-\gamma}] \leqslant$$

$$\leqslant C_\gamma[\|\hat{f}\|_{s,-\gamma} + \|[1-\zeta(r-c)]R\hat{u}_\mu\|_{s,-\gamma} + \|\zeta(r-c)R\hat{u}_\mu\|_{s,-\gamma}],$$

где функция ζ определена в лемме 1. Отсюда если $c \geqslant R_0$ таково, что последнее слагаемое в правой части оценки не превосходит величины $\|\hat{u}_\mu\|_{s+2m,\gamma}/2C_\gamma$ (что возможно в силу леммы 1), то

$$\|u_\mu\|_{H^{s+2m}_\gamma(\Omega)} \leqslant C[\|\hat{f}\|_{H^s_{-\gamma}(R^n)} + \|\hat{u}_\mu\|_{H^{s+2m}(B_{c+1})}] \leqslant$$

$$\leqslant C[\|f\|_{H^s_{-\gamma}(\Omega)} + \|u_\mu\|_{H^{s+2m}(\Omega_{c+1})}]. \tag{13}$$

Последнее неравенство следует из (12) и (7). Из (13) и локальной априорной оценки для решений эллиптических задач (теорема 6 гл. VI) вытекает (9). Переход от оценки (9) к (10) доказывается точно так же, как и аналогичное утверждение (теорема 4 гл. VI) для эллиптических задач в ограниченной области.

П р а в ы й   р е г у л я р и з а т о р. Оценим при $d \to \infty$ норму следующего оператора:

$$N: H^s_{-\gamma}(\Omega) \to H^s_{-\gamma}(\Omega),$$

$$Nf = \zeta(r-d)R\left(x, i\frac{\partial}{\partial x}\right)A^\mu(\zeta(r-d-1)f), \; f \in H^s_{-\gamma}(\Omega),$$

где функция ζ определена в лемме 1, а функция $\zeta(r-d-1)f$ продолжена нулем в область $R^n \setminus \Omega$. Так как все производные функции $\zeta(r-d-1)$ ограничены равномерно по d, то оператор умножения на $\zeta(r-d-1)$ является ограниченным оператором из пространства $H^s_{-\gamma}(R^n)$ в себя, норма которого не превосходит некоторой константы, не зависящей от d. Вместе с ограниченностью оператора A^μ в пространствах, указанных в формуле (5), и леммой 1 это дает стремление к нулю нормы оператора N при $d \to \infty$. Зафиксируем такое $d \geqslant R_0$, чтобы $\|N\| < 1/2$ при выбранном d.

В области Ω_{d+4} рассмотрим задачу

$$\begin{cases} P\left(x, i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)v = f, \; x \in \Omega_{d+4}, \\ Bv|_\Gamma = \varphi, \; Dv|_{r=d+4} = 0, \end{cases} \tag{14}$$

где $B = (B_1(x, i\partial/\partial x), \ldots, B_m(x, i\partial/\partial x))$, D — аналогичный вектор из дифференциальных операторов $D_j(x, i\partial/\partial x)$ порядка $d_j < s+2m-1/2$,

удовлетворяющих условиям Шапиро — Лопатинского на сфере $r=d+4$ (а в остальном — произвольный).

Определим оператор

$$Q: H^s(\Omega_{d+4}, \Gamma) \to H^{s+2m}(\Omega_{d+4}) \tag{15}$$

следующим образом. Векторы $(f, \varphi) \in H^s(\Omega_{d+4}, \Gamma)$, для которых задача (14) разрешима в пространстве $H^{s+2m}(\Omega_{d+4})$, оператор Q переводит в решения задачи (14), ортогональные ядру задачи. На ортогональном дополнении к указанным элементам (f, φ) положим $Q(f, \varphi)=0$. На все пространство $H^s(\Omega_{d+4}, \Gamma)$ распространим оператор Q по линейности. Пусть

$$\begin{cases} P\left(x, i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)Q(f, \varphi) = f + M_1(f, \varphi), \ x \in \Omega_{d+4}, \\ B\left(x, i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)Q(f, \varphi)|_\Gamma = \varphi + M_2(f, \varphi). \end{cases} \tag{16}$$

Из теоремы 3 гл. VI следует, что оператор (15) ограничен, а оператор

$$M = (M_1, M_2): H^s(\Omega_{d+4}, \Gamma) \to H^s(\Omega_{d+4}, \Gamma)$$

конечномерен и, значит, конечномерным является каждый из операторов M_1 и M_2, действующих соответственно в пространство $H^{s+2m}(\Omega_{d+4})$ и в прямую сумму пространств $H^{s+2m-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

Обозначим через α_1, α_2, β_1, β_2 функции: $\alpha_1=1-\zeta(r-d-1)$ $\alpha_2=\zeta(r-d-1)$, $\beta_1=1-\zeta(r-d-2)$, $\beta_2=\zeta(r-d)$, где функция ζ определена в лемме 1. Отметим, что $\alpha_1+\alpha_2\equiv 1$ и $|\nabla\alpha_i|=0$ при $r\leqslant d+1$ и $r\geqslant d+2$, а функции β_1, β_2 таковы, что $\beta_1\alpha_1\equiv\alpha_1$, $\beta_2\alpha_2\equiv\alpha_2$ и $\beta_1=0$ при $r>d+3$, $\beta_2=0$ в окрестности Γ.

Пусть Φ — оператор («почти обратный» к задаче (2))

$$\Phi: H^s_{-\gamma}(\Omega, \Gamma) \to H^{s+2m}_\gamma(\Omega), \tag{17}$$

действующий по формуле

$$\Phi(f, \varphi) = \beta_1 Q(\alpha_1 f, \varphi) + \beta_2 A^\mu(\alpha_2 f). \tag{18}$$

Чтобы не загромождать последующих выкладок, мы не стали здесь и не будем ниже вставлять необходимые для полной строгости написанных выражений операторы ограничения функций на области Ω или Ω_{d+4} и операторы продолжения нулем на $R^n\setminus\Omega$ или $\Omega\setminus\Omega_{d+4}$. Например, чтобы применить оператор Q к $(\alpha_1 f, \varphi)$, надо сначала взять ограничение f на Ω_{d+4}. При этом функция $\beta_1 Q(\alpha_1 f, \varphi)$ будет принадлежать пространству $H^{s+2m}(\Omega_{d+4})$. Поскольку она равна нулю при $d+4>r>d+3$, считаем ее нулем при всех x таких, что $r>d+3$. Аналогично понимается второе слагаемое в правой части формулы (18). Вычислим результат, который получится, если подставить функцию $\Phi(f, \varphi)$ в уравнение и граничные условия задачи (2).

Очевидно,

$$P\left(x,\ i\frac{\partial}{\partial x}\right)\beta_1 Q(\alpha_1 f, \varphi) = \alpha_1 f + \beta_1 M_1(\alpha_1 f, \varphi) + \{P, \beta_1\} Q(\alpha_1 f, \varphi), \tag{19}$$

где $\{P, \beta_1\}$ — коммутатор дифференциального оператора $P(x, i\partial/\partial x)$ и оператора умножения на β_1. Так как $\{P, \beta_1\}$ — дифференциальный оператор порядка не выше $2m-1$, коэффициенты которого равны нулю при $r<d+2$ и $r>d+3$, то из ограниченности оператора (15) и теоремы 2 гл. VI следует, что оператор, переводящий (f, φ) в $\{P, \beta_1\}Q(\alpha_1 f, \varphi)$, является компактным оператором из пространства $H^s_{-\gamma}(\Omega, \Gamma)$ в $H^s_{-\gamma}(\Omega)$. Учитывая конечномерность оператора M_1, мы можем переписать формулу (19) в виде

$$P\left(x,\ i\frac{\partial}{\partial x}\right)\beta_1 Q(\alpha_1 f, \varphi) = \alpha_1 f + T_1(f, \varphi), \tag{20}$$

где оператор $T_1: H^s_{-\gamma}(\Omega, \Gamma) \to H^s_{-\gamma}(\Omega)$ компактен.

Аналогично,

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\beta_2 A^{\mu}(\alpha_2 f) = \alpha_2 f + \left\{P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right),\ \beta_2\right\} A^{\mu}(\alpha_2 f), \tag{21}$$

$$R\left(x,\ i\frac{\partial}{\partial x}\right)\beta_2 A^{\mu}(\alpha_2 f) = \beta_2 R\left(x,\ i\frac{\partial}{\partial x}\right) A^{\mu}(\alpha_2 f) + \{R, \beta_2\} A^{\mu}(\alpha_2 f). \tag{22}$$

Из той же теоремы 2 гл. VI и ограниченности оператора (5) следует компактность оператора $T_2: H^s_{-\gamma}(\Omega, \Gamma) \to H^s_{-\gamma}(\Omega)$, который каждому вектору (f, φ) ставит в соответствие сумму вторых слагаемых в правых частях формул (21), (22). Так как первое слагаемое в правой части формулы (22) равно Nf, где оператор N был определен выше, то, суммируя равенства (20)—(22), получаем

$$P\left(x,\ i\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(f, \varphi) = f + Nf + T_3(f, \varphi), \tag{23}$$

где оператор $T_3: H^s_{-\gamma}(\Omega, \Gamma) \to H^s_{-\gamma}(\Omega)$ компактен.

Далее, поскольку $\beta_2 = 0$ в окрестности границы Γ, а $\beta_1 = 1$ в окрестности Γ, то

$$B\Phi(f, \varphi)|_{\Gamma} = BQ(\alpha_1 f, \varphi)|_{\Gamma} = \varphi + M_2(\alpha_1 f, \varphi), \tag{24}$$

где оператор M_2, определенный в формуле (16), конечномерен.

Окончательно, обозначим через $\mathfrak{A}$ оператор

$$\mathfrak{A}: u \to \left(P\left(x,\ i\frac{\partial}{\partial x}\right)u,\ Bu|_{\Gamma}\right),$$

отвечающий задаче (2), через G и T операторы

$$G,\ T: H^s_{-\gamma}(\Omega, \Gamma) \to H^s_{-\gamma}(\Omega, \Gamma),$$

$$G(f, \varphi) = (Nf, 0), \quad T(f, \varphi) = (T_3(f, \varphi), M_2(f, \varphi)).$$

Тогда $\|G\|<1/2$, оператор T — компактен, а формулы (23), (24) можно переписать так: $\mathfrak{A}\Phi=I+G+T$, где I — единичный оператор. Следовательно,

$$\mathfrak{A}\Phi(I+G)^{-1}=I+\hat{T},\ \hat{T}=T(I+G)^{-1},$$

где оператор $(I+G)^{-1}$ ограничен, а $\hat{T}$ — компактен. Это означает (по определению), что оператор $\hat{\Phi}=\Phi(I+G)^{-1}$ является правым регуляризатором задачи (2).

Будем теперь искать решение задачи (2) в виде $u=\hat{\Phi}(g, \psi)$ с неизвестными $(g, \psi)\in H^s_{-\gamma}(\Omega, \Gamma)$. При любых (g, ψ) функция $\hat{\Phi}(g, \psi)$ принадлежит $\overline{W}^\mu(\Omega)$. Действительно, из (18) следует, что $\Phi(g, \psi)-A^\mu(\alpha_2 g)\in\overline{W}^\mu(\Omega)$ (эта разность имеет компактный носитель). Так как $A^\mu(\alpha_2 g)\in\overline{W}^\mu(\Omega)$, то $\Phi(g, \psi)\in\overline{W}^\mu(\Omega)$ при любых $(g, \psi)\in H^s_{-\gamma}(\Omega, \Gamma)$ и, значит, $\hat{\Phi}(g, \psi)=\Phi(I+G)^{-1}(g, \psi)\in\overline{W}^\mu(\Omega)$. Подставив функцию $u=\hat{\Phi}(g, \psi)$ в оператор $\mathfrak{A}$, получаем, что эта функция будет решением задачи (2) тогда и только тогда, когда вектор (g, ψ) является решением следующего уравнения (в пространстве $H^s_{-\gamma}(\Omega, \Gamma)$) : $(I+\hat{T})(g, \psi)=(f, \varphi)$.

Так как оператор $\hat{T}$ компактен, это доказывает утверждение теоремы 1 о разрешимости задачи (2).

Для доказательства теоремы 1 остается показать, что однородная задача (2) имеет в пространстве $\overline{W}^\mu(\Omega)$ конечное число линейно независимых решений. Это доказывается с помощью априорной оценки (9) точно так же, как и конечномерность ядра эллиптических задач в ограниченной области. Действительно, пусть $u_j\in\overline{W}^\mu(\Omega)\subset H^{s+2m}_\gamma(\Omega)$, $j=1, 2, \ldots$ — любая последовательность решений однородной задачи (2), ограниченная в норме $H^{s+2m}_\gamma(\Omega)$. Согласно теореме 2 гл. VI, из нее можно выбрать подпоследовательность u_{m_j}, $j=1, 2, \ldots$, фундаментальную в пространстве $H^s(\Omega_\rho)$, где ρ — константа, участвующая в оценке (9). В силу этой оценки последовательность u_{m_j} будет фундаментальна в $H^{s+2m}_\gamma(\Omega)$. Поскольку последовательность u_j решений была произвольной, это доказывает конечномерность ядра задачи (2). ■

Теорема 2. *Пусть $P(i\partial/\partial x)$ — эллиптический оператор порядка $2m$ такой, что $P(\sigma)\neq 0$ при $\sigma\in R^n$. Пусть $R(x, i\partial/\partial x)$ — оператор порядка не выше $2m$, коэффициенты которого бесконечно дифференцируемы и принадлежат пространству $L_{s,0}$. Пусть задача* (2) *эллиптична и* $s>s^0=\max(-2m+m_j+1/2)$.

Тогда оператор

$$\mathfrak{A}: H^{s+2m}(\Omega)\to H^s(\Omega, \Gamma),$$

ставящий в соответствие функции и вектор из правых частей задачи (2), *нётеров, и существуют такие не зависящие от* (f, φ) *константы C и ρ, что для принадлежащих $H^{s+2m}(\Omega)$ решений зада-*

чи (2) справедлива оценка

$$\|u\|_{H^{s+2m}(\Omega)} \leqslant C\left[\|f\|_{H^s(\Omega)} + \sum_{j=1}^{m} \|\varphi_j\|_{H^{s+2m-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|u\|_{H^s(\Omega_\rho)}\right],$$

где последнее слагаемое в правой части можно отбросить, если оператор $\mathfrak{A}$ имеет тривиальное ядро или функция и ортогональна ядру оператора $\mathfrak{A}$.

Доказательство получается дословным повторением тех рассуждений, которые были проведены при доказательстве теоремы 1. Нужно только положить в них $\gamma=0$, заменить A^μ на оператор P^{-1}, который ставит в соответствие функции $f\in H^s(R^n)$ решение $u\in H^{s+2m}(R^n)$ уравнения $P(i\partial/\partial x)u=f$, $x\in R^n$, и вместо ограниченности оператора (5) использовать теорему 2 предыдущей главы. ■

Легко привести пример, показывающий, что ядро задачи (2) в условиях теорем 1, 2 может быть не тривиальным. В качестве такого примера можно рассмотреть уравнение

$$[\Delta+k^2+\psi(x)]\,u(x)=0, \quad x\in R^3, \tag{25}$$

где $k>0$, $\psi\in C_0^\infty(R^3)$. Одним из пространств W^μ для уравнения (25) является пространство функций, для которых в окрестности бесконечности выполняются оценки:

$$|u(x)|<Cr^{-1}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial r}-iku\right|<Cr^{-2}.$$

Пусть $u(x)=r^{-1}\exp(ikr)$ при $r\geqslant k^{-1}$. Продолжим эту функцию бесконечно дифференцируемым образом внутрь шара $r<k^{-1}$. При этом поскольку $\operatorname{Re}u(x)=k\cos 1>0$ на сфере $r=k^{-1}$, то можно продолжить функцию $u(x)$ так, чтобы $\operatorname{Re}u(x)>0$ при $r<k^{-1}$, т. е. чтобы $|u(x)|\neq 0$ при всех $x\in R^3$. Эта функция принадлежит W^μ и является решением уравнения (25) при $\psi=[(\Delta+k^2)u]/u\in C_0^\infty(R^3)$.

Заменив в этих рассуждениях k на ik, получим пример уравнения, удовлетворяющего условиям теоремы 2 и имеющего нетривиальное ядро. Несложно показать, что в рассмотренных примерах имеется также и нетривиальное коядро. В работах [26, 27] получены достаточные условия, обеспечивающие отсутствие нетривиальных решений однородной задачи (2).

§ 2. Принцип предельного поглощения для внешних задач

Пусть задача (2) удовлетворяет условиям теоремы 1. Рассмотрим близкую задачу

$$\begin{cases} P_\varepsilon^Q\left(x,\, i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=f(x), \ x\in\Omega, \\ \left[B_j\left(x,\, i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)+\varepsilon B_j\left(\varepsilon,\, x,\, i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right]u(x)|_\Gamma=\varphi_j(x), \ 1\leqslant j\leqslant m, \end{cases} \tag{26}$$

где $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \tilde{\varepsilon}$ и

$$P_\varepsilon^{Q}\left(x, i\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left[T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) + i\varepsilon Q\left(\varepsilon, i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] P_1\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) + R\left(x, i\frac{\partial}{\partial x}\right) + \varepsilon R\left(\varepsilon, x, i\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Здесь оператор Q при $0 < \varepsilon \leqslant \tilde{\varepsilon}$ соответствует некоторому вектору μ в том смысле, как это было определено в § 5 предыдущей главы, $R(\varepsilon, x, i\partial/\partial x)$ и $B_j(\varepsilon, x, i\partial/\partial x)$ — операторы порядка не выше $2m$ и m_j соответственно с бесконечно дифференцируемыми по $\varepsilon \in [0, \tilde{\varepsilon}]$ и $x \in \bar{\Omega}$ коэффициентами, причем коэффициенты оператора $R(\varepsilon, x, i\partial/\partial x)$ при каждом $\varepsilon \in [0, \tilde{\varepsilon}]$ принадлежат пространству $L_{s,\gamma}$, а после умножения на $(1+r^2)^{-\gamma}$ сами коэффициенты и все их производные до порядка $\{|s|\}$ включительно становятся равномерно по $\varepsilon \in [0, \tilde{\varepsilon}]$ ограниченными функциями при $x \in \Omega$.

Очевидно, при достаточно малых $|\varepsilon|$ задача (26) эллиптична. Можно считать $\tilde{\varepsilon} > 0$ таким, что задача (2) эллиптична при всех $\varepsilon \in [0, \tilde{\varepsilon}]$. Как и раньше, через φ будем обозначать вектор $(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$, через B — вектор из операторов $B_j(x, i\partial/\partial x)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, через B_ε — вектор из операторов, определяющих граничные условия задачи (26).

Пусть N и M — два конечномерных подпространства гильбертова пространства. Будем говорить, что расстояние между ними не превосходит δ, если они имеют одинаковую размерность и можно выбрать в этих подпространствах ортонормированные базисы $\{n_i\}$ и $\{m_i\}$ соответственно так, что $\|n_i - m_i\| < \delta$ при всех i.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, $0 < \theta < 1$, $\gamma > 1 + \theta$ *и для некоторого вектора* μ *задача* (2) *имеет в пространстве* $\overline{W}^\mu(\Omega)$ *решение при всех* $(f, \varphi) \in H^s_{-\gamma}(\Omega, \Gamma)$. *Пусть* N — *пространство принадлежащих* $\overline{W}^\mu(\Omega)$ *решений однородной задачи* (2), $u_\mu \in \overline{W}^\mu(\Omega)$ — *решение задачи* (2), *ортогональное* (*в* $H_\gamma^{s+2m}(\Omega)$) *пространству* N. *Пусть оператор* $Q(\varepsilon, i\partial/\partial x)$ *соответствует выбранному вектору* μ.

Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, *что при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *задача* (26) *имеет в пространстве* $H^{s+2m}(\Omega)$ *решение при всех* $(f, \varphi) \in H^s(\Omega, \Gamma)$. *Если* N_ε — *пространство принадлежащих* $H^{s+2m}(\Omega)$ *решений однородной задачи* (26), *а* $u_\varepsilon \in H^{s+2m}(\Omega)$ — *решение задачи* (26), *ортогональное в* $H_\gamma^{s+2m}(\Omega)$ *пространству* N_ε, *то при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *расстояние между* N *и* N_ε *в пространстве* $H_\gamma^{s+2m}(\Omega)$ *не превосходит* $C\varepsilon^\theta$ *и при* $(f, \varphi) \in H^s_{-\gamma}(\Omega, \Gamma)$ *справедлива оценка*:

$$\|u_\varepsilon - u_\mu\|_{H_\gamma^{s+2m}(\Omega)} \leqslant C_{\gamma,\theta}\varepsilon^\theta \left[\|f\|_{H^s_{-\gamma}(\Omega)} + \sum_{j=1}^{m} \|\varphi_j\|_{H^{s+2m-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)}\right]. \tag{27}$$

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_\varepsilon$ операторы:

$$\mathfrak{A}_0 : H_\gamma^{s+2m}(\Omega) \to H_{-\gamma}^s(\Omega, \Gamma), \quad \mathfrak{A}_\varepsilon : H^{s+2m}(\Omega) \to H^s(\Omega, \Gamma),$$

переводящие функцию u в вектор из правых частей задачи (2) или (26) соответственно. Оператор $\mathfrak{A}_0$ неограничен, в качестве его области определения рассматривается пространство функций $\overline{\overline{W}}{}^\mu(\Omega)$, удовлетворяющих условиям излучения в слабом смысле. Операторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ ограничены при всех $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}]$. В силу теорем 1, 2 операторы $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_\varepsilon$ имеют конечномерные ядра (N и N_ε) и коядра, а по условию теоремы 3 область значений оператора $\mathfrak{A}_0$ совпадает со всем пространством $H^s_{-\gamma}(\Omega, \Gamma)$.

Обозначим через $\mathfrak{A}_0^{-1}$ правый обратный к оператору $\mathfrak{A}_0$, переводящий функции $(f, \varphi) \in H^s_{-\gamma}(\Omega, \Gamma)$ в u_μ — принадлежащее $\overline{\overline{W}}{}^\mu(\Omega)$ решение задачи (2), ортогональное ядру N. Этот оператор определен на всем пространстве $H^s_{-\gamma}(\Omega, \Gamma)$ и ограничен (оценка (10)). Рассмотрим оператор

$$\Phi_\varepsilon = (P_\varepsilon^Q)^{-1} P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) l\,\mathfrak{A}_0^{-1} : H^s_{-\gamma}(\Omega, \Gamma) \to H^{s+2m}(\Omega). \qquad (28)$$

Здесь l — рассматривавшийся выше (формула (8)) оператор гладкого продолжения в область $R^n \setminus \Omega$, $(P_\varepsilon{}^Q)^{-1}$ — оператор, переводящий функции $f \in H^s(R^n)$ в принадлежащее $H^{s+2m}(R^n)$ решение уравнения

$$P_\varepsilon^Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u \equiv \left[T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) + i\varepsilon Q\left(\varepsilon, i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \times$$
$$\times P_1\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u = f, \ x \in R^n. \qquad (29)$$

Для полной строгости нужно было бы еще написать в формуле (28) слева от оператора $(P_\varepsilon{}^Q)^{-1}$ оператор ограничения функций на область Ω. Чтобы не загромождать выкладок, мы, как и раньше, не будем этого делать.

Покажем, что оператор Φ_ε при каждом $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}]$ определен на всем пространстве $H^s_{-\gamma}(\Omega, \Gamma)$ и ограничен, а оператор $\widehat{\Phi}_\varepsilon = J\Phi_\varepsilon$, где $J: H^{s+2m}(\Omega) \to H_\gamma^{s+2m}(\Omega)$ — оператор вложения, непрерывно (в равномерной норме) зависит от $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}]$ и сходится к $\mathfrak{A}_0^{-1}$ при $\varepsilon \to +0$, причем

$$\|\widehat{\Phi}_\varepsilon - \mathfrak{A}_0^{-1}\| \leqslant C\varepsilon^\theta. \qquad (30)$$

Обозначим через $\hat{u}_\mu$ функцию $l\mathfrak{A}_0^{-1}(f, \varphi)$ и через h — функцию $P(i\partial/\partial x)\hat{u}_\mu$. Из ограниченности оператора $\mathfrak{A}_0^{-1}$ и оператора (8) вытекает оценка

$$\|\widehat{u_\mu}\|_{H_\gamma^{s+2m}(R^n)} \leqslant C\left[\|f\|_{H^s_{-\gamma}(\Omega)} + \sum_{j=1}^m \|\varphi_j\|_{H^{s+2m-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)}\right]. \qquad (31)$$

Для функции h справедлива следующая оценка:

$$\|h\|_{H^s_{-\gamma}(R^n)} \leqslant C\Big[\|f\|_{H^s_{-\gamma}(\Omega)} + \sum_{j=1}^{m} \|\varphi_j\|_{H^{s+2m-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)}\Big]. \qquad (32)$$

Действительно, поскольку функция $\hat{u}_\mu$ при $x\in\Omega$ является решением задачи (2), то $h=f-R(x, i\partial/\partial x)\hat{u}_\mu$ при $x\in\Omega$. Поэтому, если ζ — функция, определенная в лемме 1, и d — произвольная фиксированная константа такая, что $d>R_0$, то

$$\|\zeta(r-d)h\|_{H^s_{-\gamma}(R^n)} \leqslant \|\zeta(r-d)f\|_{H^s_{-\gamma}(R^n)} + \|\zeta(r-d)R\hat{u}_\mu\|_{H^s_{-\gamma}(R^n)} \leqslant$$

$$\leqslant C[\|f\|_{H^s_{-\gamma}(\Omega)} + \|R\hat{u}_\mu\|_{H^s_{-\gamma}(R^n)}].$$

Вместе с леммой 1 и (31) это позволяет оценить норму функции $\zeta(r-d)h$ через правую часть неравенства (32). С другой стороны, поскольку $h=P(i\partial/\partial x)\hat{u}_\mu$, то оценка нормы функции $(1-\zeta(r-d))h$ в пространстве $H^s_{-\gamma}(R^n)$ через правую часть неравенства (32) является очевидным следствием неравенства (31). Это доказывает справедливость оценки (32).

Так как $\mathfrak{A}_0^{-1}(f, \varphi)\in\overline{W}^\mu(\Omega)$, то (согласно определению пространства $\overline{W}^\mu(\Omega)$) $\hat{u}_\mu\in\overline{W}^\mu(R^n)$. А так как $P(i\partial/\partial x)\hat{u}_\mu=h\in H^s_{-\gamma}(R^n)$, то

$$\hat{u}_\mu = A^\mu h, \qquad (33)$$

где A^μ — ограниченный оператор в пространствах, определенных в формуле (5), при этом формулу (28) можно переписать в виде

$$\Phi_\varepsilon(f, \varphi) = (P_\varepsilon^Q)^{-1}\hat{h}. \qquad (34)$$

Из оценки (32) и теоремы 2 предыдущей главы вытекает ограниченность оператора Φ_ε, а из теоремы 12 предыдущей главы, оценки (32) и формул (33), (34) следуют все сделанные выше утверждения относительно оператора $\widehat{\Phi}_\varepsilon$.

Будем теперь искать решение задачи (26) в виде $u=\Phi_\varepsilon(g, \psi)$ с неизвестными $(g, \psi)\in H^s_{-\gamma}(\Omega, \Gamma)$. В силу ограниченности оператора (28) $u\in H^{s+2m}(\Omega)$ при любых $(g, \psi)\in H^s_{-\gamma}(\Omega, \Gamma)$. Подставив функцию u в уравнение задачи (26), получим

$$P_\varepsilon^Q\left(x, i\frac{\partial}{\partial x}\right)u = P_\varepsilon^Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)(P_\varepsilon^Q)^{-1}P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)l\mathfrak{A}_0^{-1}(g, \psi) +$$

$$+\left[R\left(x, i\frac{\partial}{\partial x}\right) + \varepsilon R\left(\varepsilon, x, i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]\Phi_\varepsilon(g, \psi). \qquad (35)$$

Так как оператор $(P_\varepsilon^Q)^{-1}$ переводит функции f в решения уравнения (29), то первое слагаемое в правой части равенства (35) при $x\in\Omega$ равно $P(i\partial/\partial x)\mathfrak{A}_0^{-1}(g, \psi)=g-R(x, i\partial/\partial x)\mathfrak{A}_0^{-1}(g, \psi)$. Следовательно, равенство (35) эквивалентно следующему ра-

венству:

$$P_\varepsilon^Q\left(x,\ i\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi_\varepsilon(g,\psi)=g+R\left(x,\ i\frac{\partial}{\partial x}\right)(\Phi_\varepsilon-\mathfrak{A}_0^{-1})(g,\psi)+$$
$$+\varepsilon R\left(\varepsilon,\ x,\ i\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi_\varepsilon(g,\psi). \qquad (36)$$

Результат применения граничного оператора B_ε к функции u запишем в виде

$$B_\varepsilon\Phi_\varepsilon(g,\psi)|_\Gamma=B\mathfrak{A}_0^{-1}(g,\psi)|_\Gamma+B(\Phi_\varepsilon-\mathfrak{A}_0^{-1})(g,\psi)|_\Gamma+$$
$$+(B_\varepsilon-B)\Phi_\varepsilon(g,\psi)|_\Gamma=$$
$$=\psi+B(\Phi_\varepsilon-\mathfrak{A}_0^{-1})(g,\psi)|_\Gamma+(B_\varepsilon-B)\Phi_\varepsilon(g,\psi)|_\Gamma. \qquad (37)$$

Из леммы 1 следует, что оператор $R(x,\ i\partial/\partial x)$ является ограниченным оператором из пространства $H_\gamma^{s+2m}(\Omega)$ в $H_{-\gamma}^s(\Omega)$, а из условий, наложенных на коэффициенты оператора $R(\varepsilon,\ x,\ i\partial/\partial x)$, следует, что в этих же пространствах равномерно по ε ограничен оператор $R(\varepsilon,\ x,\ i\partial/\partial x)$. Поэтому из (36), (37), ограниченности оператора $\mathfrak{A}_0^{-1}$, оценки (30) и теоремы 1 гл. VI следует, что

$$\mathfrak{A}_\varepsilon\Phi_\varepsilon=I+F_\varepsilon, \qquad (38)$$

где I — единичный оператор, а норма оператора

$$F_\varepsilon: H_{-\gamma}^s(\Omega,\Gamma)\to H_{-\gamma}^s(\Omega,\Gamma)$$

не превосходит $C\varepsilon^\theta$.

Пусть $\varepsilon_0>0$ настолько мало, что $\|F_\varepsilon\|<1/2$ при $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$. Из (38) вытекает, что при $0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ задача (26) имеет в пространстве $H^{s+2m}(\Omega)$ решение при всех $(f,\ \varphi)\in H^s_{-\gamma}(\Omega,\ \Gamma)$, равное

$$v_\varepsilon=\Phi_\varepsilon(I+F_\varepsilon)^{-1}(f,\ \varphi). \qquad (39)$$

Поскольку функции из пространства $H^s_{-\gamma}(\Omega,\ \Gamma)$ плотны в $H^s(\Omega,\Gamma)$, то из теоремы 2 следует разрешимость в $H^{s+2m}(\Omega,\ \Gamma)$ задачи (26) при всех $(f,\ \varphi)\in H^s(\Omega,\ \Gamma)$. Из приведенной выше оценки оператора F_ε и (30) следует, что

$$\|v_\varepsilon-u_\mu\|_{H_\gamma^{s+2m}(\Omega)}\leqslant C\varepsilon^0\left[\|f\|_{H_{-\gamma}^s(\Omega)}+\sum_{j=1}^{m}\|\varphi_j\|_{H^{s+2m-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)}\right]. \qquad (40)$$

Докажем теперь утверждение теоремы 3 о близости ядер операторов $\mathfrak{A}_0$ и $\mathfrak{A}_\varepsilon$. Пусть $\omega_\mu\in\overline{W}^\mu(\Omega)$ — решение однородной задачи (2) и

$$\hat\omega_\mu=l\,\omega_\mu\in\overline{W}^\mu(R^n)\subset H_\gamma^{s+2m}(R^n),$$

где оператор l определен в формуле (8). Считая, что коэффициенты оператора $R(x,\ i\partial/\partial x)$ продолжены бесконечно дифферен-

цируемо в $R^n \setminus \Omega$, получим, что

$$P\left(x,\ i\frac{\partial}{\partial x}\right)\widehat{\omega}_\mu = f,\quad \|f\|_{H^s_{-\gamma}(R^n)} \leqslant C\|\omega_\mu\|_{H^{s+2m}_\gamma(\Omega)}.$$

Это следует из ограниченности оператора (8) и того, что $f=0$ при $x\in\Omega$. Значит, при $x\in R^n$

$$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\widehat{\omega}_\mu = g,\quad g = f - R\left(x,\ i\frac{\partial}{\partial x}\right)\widehat{\omega}_\mu, \tag{41}$$

где в силу леммы 1 и ограниченности оператора (8)

$$\|g\|_{H^s_{-\gamma}(R^n)} \leqslant C\|\omega_\mu\|_{H^{s+2m}_\gamma(\Omega)}.$$

Пусть $w_\varepsilon\in H^{s+2m}(R^n)$ — решение уравнения

$$P^Q_\varepsilon\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)w_\varepsilon = g,\quad x\in R^n. \tag{42}$$

Из теоремы 12 гл. VII следует, что

$$\|\widehat{\omega}_\mu - w_\varepsilon\|_{H^{s+2m}_\gamma(R^n)} \leqslant C\varepsilon^\theta\|g\|_{H^s_{-\gamma}(R^n)} \leqslant C\varepsilon^\theta\|\omega_\mu\|_{H^{s+2m}_\gamma(\Omega)}. \tag{43}$$

Из (41), (42) получаем

$$\left[P^Q_\varepsilon\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) + R\left(x,\ i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]w_\varepsilon =$$

$$= f + R\left(x,\ i\frac{\partial}{\partial x}\right)(w_\varepsilon - \widehat{\omega}_\mu),\quad x\in R^n,$$

и, значит,

$$P^Q_\varepsilon\left(x,\ i\frac{\partial}{\partial x}\right)w_\varepsilon = f + R\left(x,\ i\frac{\partial}{\partial x}\right)(w_\varepsilon - \widehat{\omega}_\mu) +$$

$$+\varepsilon R\left(\varepsilon, x, i\frac{\partial}{\partial x}\right)w_\varepsilon,\quad x\in R^n.$$

Как уже отмечалось, оператор $R(\varepsilon,\ x,\ i\partial/\partial x)$ является равномерно по ε ограниченным оператором из пространства $H^{s+2m}_\gamma(R^n)$ в $H^s_{-\gamma}(R^n)$. Вместе с леммой 1, оценкой (43) и равенством нулю функции f при $x\in\Omega$ это позволяет получить следующую оценку:

$$P^Q_\varepsilon\left(x,\ i\frac{\partial}{\partial x}\right)w_\varepsilon = f_\varepsilon,\ \|f_\varepsilon\|_{H^s_{-\gamma}(\Omega)} \leqslant C\varepsilon^\theta\|\omega_\mu\|_{H^{s+2m}_\gamma(\Omega)}.$$

Через ту же величину, что и норма функции f_ε, оценивается норма вектора $\varphi_\varepsilon = B_\varepsilon w_\varepsilon|_\Gamma$ в прямой сумме пространств $H^{s+2m-m_j-1/2}(\Gamma)$. Для этого надо записать вектор φ_ε в виде

$$\varphi_\varepsilon = B\widehat{\omega}_\mu|_\Gamma + (B_\varepsilon - B)\widehat{\omega}_\mu|_\Gamma + B_\varepsilon(w_\varepsilon - \widehat{\omega}_\mu)|_\Gamma =$$

$$= (B_\varepsilon - B)\widehat{\omega}_\mu|_\Gamma + B_\varepsilon(w_\varepsilon - \widehat{\omega}_\mu)|_\Gamma$$

и затем воспользоваться оценкой (43) и теоремой 1 гл. VI.

Окончательно, для произвольной функции $\omega_\mu \in N$ мы построили функцию w_ε, обладающую оценкой (43), и такую, что $\mathfrak{A}_\varepsilon w_\varepsilon = (f_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$, где

$$\|(f_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)\|_{H^s_{-\gamma}(\Omega,\Gamma)} \leqslant C\varepsilon^\theta \|\omega_\mu\|_{H^{s+2m}_\gamma(\Omega)}.$$

Пусть v_ε, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ — решение уравнения $\mathfrak{A}_\varepsilon v_\varepsilon = (f_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$, которое дается формулой (39) с $(f, \varphi) = (f_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)$. Поскольку $\|F_\varepsilon\| \leqslant 1/2$ при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, а оператор $\widehat{\Phi}_\varepsilon$ равномерно по ε ограничен (оценка (30)), то

$$\|v_\varepsilon\|_{H^{s+2m}_\gamma(\Omega)} \leqslant C\|(f_\varepsilon, \varphi_\varepsilon)\|_{H^s_{-\gamma}(\Omega,\Gamma)} \leqslant C\varepsilon^\theta \|\omega_\mu\|_{H^{s+2m}_\gamma(\Omega)}. \tag{44}$$

Таким образом, функция $\omega_\varepsilon = w_\varepsilon - v_\varepsilon$, $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, является решением однородной задачи (26) и согласно (43), (44) обладает оценкой

$$\|v_\varepsilon - \omega_\mu\|_{H^{s+2m}_\gamma(\Omega)} \leqslant C\varepsilon^\theta \|\omega_\mu\|_{H^{s+2m}_\gamma(\Omega)}. \tag{45}$$

Точно так же доказывается, что если $v_\varepsilon \in N_\varepsilon$, то существует такая функция $\omega_\mu \in N$, что

$$\|v_\varepsilon - \omega_\mu\|_{H^{s+2m}_\gamma(\Omega)} \leqslant C\varepsilon^\theta \|v_\varepsilon\|_{H^{s+2m}_\gamma(\Omega)}. \tag{46}$$

Оценки (45), (46) эквивалентны сформулированному в теореме 3 утверждению о близости пространств N и N_ε.

Наконец, пусть (f, φ) — произвольный вектор из пространства $H^s_{-\gamma}(\Omega, \Gamma)$, $u_\mu = \mathfrak{A}_0^{-1}(f, \varphi)$ и v_ε — решение задачи (26), которое дается формулой (39). Для доказательства теоремы 3 остается получить оценку (27) для разности $u_\varepsilon - u_\mu$, где $u_\varepsilon = v_\varepsilon - v'_\varepsilon$ и v'_ε — ортогональная проекция v_ε в пространстве $H^{s+2m}_\gamma(\Omega)$ на N_ε. Через v''_ε обозначим аналогичную проекцию v_ε на N. Из уже доказанной близости пространств N и N_ε следует, что

$$\|v'_\varepsilon - v''_\varepsilon\|_{H^{s+2m}_\gamma(\Omega)} \leqslant C\varepsilon^\theta \|v_\varepsilon\|_{H^{s+2m}_\gamma(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon^\theta \left[\|f\|_{H^s_{-\gamma}(\Omega)} + \sum_{j=1}^m \|\varphi_j\|_{H^{s+2m-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)}\right]. \tag{47}$$

Последнее неравенство следует из ограниченности оператора $\mathfrak{A}_0^{-1}$ и оценки (40). Взяв проекцию разности $v_\varepsilon - u_\mu$ на ортогональное дополнение к N в пространстве $H^{s+2m}_\gamma(\Omega)$ и учитывая, что u_μ ортогонально N, получим, что

$$\|v_\varepsilon - v''_\varepsilon - u_\mu\|_{H^{s+2m}_\gamma(\Omega)} \leqslant \|v_\varepsilon - u_\mu\|_{H^{s+2m}_\gamma(\Omega)}.$$

Это вместе с (40) и (47) доказывает справедливость оценки (27). ■

Литературные указания, дополнения. Изложенные в этой главе результаты опубликованы автором в работах [26, 27] в предположении, что рассматриваемые уравнения имеют постоянные коэффициенты в некоторой окрестности бесконечности. Там же имеются замечания о том, что изучение уравнений с достаточно быстро стабилизирующимися на бесконечности коэффициентами не вызывает особых дополнительных затруднений.

При обосновании принципа предельного поглощения можно было бы интересоваться сходимостью (в каком-нибудь слабом смысле) решений допредельной задачи к решению предельной при каждой фиксированной правой части задачи. В этом случае условия на скорость стабилизации коэффициентов уравнения на бесконечности можно существенно ослабить. Особенно далеко в этом направлении продвинуто изучение уравнений второго порядка (см., например, [136, 180, 134, 142, 126, 127, 162, 163]).

Литература по принципу предельного поглощения и условиям излучения частично приведена в предыдущей главе. Некоторые классы уравнений высокого порядка и систем изучались в работах [155, 156, 20, 182, 137, 192, 181, 179, 170, 171]. Задачи в областях с некомпактной границей рассматривались в [123, 125, 98, 82, 89, 190, 189, 196]. В следующих главах будет продолжаться изучение уравнений и систем во внешности ограниченной области, в них также имеются ссылки на литературу, относящуюся к условиям излучения и принципу предельного поглощения.

С рассмотренными в этой главе вопросами тесным образом связаны некоторые спектральные задачи: выяснение характера спектра оператора, отыскание полной системы собственных функций операторов с непрерывным спектром и некоторые задачи теории рассеяния: существование и полнота волновых операторов, свойства волновых операторов и оператора рассеяния. Изучение этих задач требует отдельного рассмотрения и мы не будем их здесь касаться. Отметим, что кроме рассмотренных в последних двух главах имеются и другие имеющие глубокий физический и математический смысл постановки задач для уравнений в неограниченных областях. В качестве примера сошлемся на работы [146, 128, 121, 133, 69, 113, 93, 94, 14, 72, 67].

Глава IX

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОПЕРАТОРОВ, ПОЛИНОМИАЛЬНО ЗАВИСЯЩИХ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

В этой главе будет предполагаться, что $P(i\partial/\partial x)$ — эллиптический оператор порядка $2m$, удовлетворяющий условиям 1, 2 и 4, сформулированным в гл. VII, т. е.

1. $\nabla P(\sigma)\neq 0$ в вещественных нулях $P(\sigma)$.

2. Множество вещественных нулей многочлена $P(\sigma)$ состоит из нескольких бесконечно дифференцируемых связных поверхностей S_j, $1\leqslant j\leqslant \varkappa$, размерности $n-1$.

4. Поверхности S_j, $1\leqslant j\leqslant\varkappa$, звездны относительно точки $\sigma=0$, причем ни один луч, выпущенный из этой точки, не касается какой-либо из поверхностей S_j.

Через $P(k, i\partial/\partial x)$ обозначим оператор, который получается, если к каждому одночлену порядка j оператора $P(i\partial/\partial x)$ дописать множитель k^{2m-j}. Таким образом, $P(k, \sigma)$ является однородным многочленом порядка $2m$ по совокупности переменных (k, σ). Очевидно, оператор $P(k, i\partial/\partial x)$ эллиптичен при всех значениях k. Легко проверить, что рассматриваемому классу операторов принадлежат операторы, полученные после замены оператора дифференцирования $i\partial/\partial t$ на параметр k из однородных строго гиперболических операторов $P(i\partial/\partial t, i\partial/\partial x)$, для которых нуль не является собственной частотой, т. е. для которых $P(0, \sigma)\neq 0$ при $\sigma\neq 0$. При этом $\varkappa=m$. Если $P(\sigma)=T(\sigma)P_1(\sigma)$ — разложение многочлена на P на множители, определенные в лемме 3 гл. VII, то, очевидно, $P(k, \sigma)=T(k, \sigma)P_1(k, \sigma)$.

Из однородности многочлена $P(k, \sigma)$ по аргументам (k, σ) следует, что оператор $P(k, i\partial/\partial x)$ при $k>0$ и $k<0$ также удовлетворяет условиям 1, 2, 4. В частности, многообразие $P(k, \sigma)=0$ в R^n_σ при $k>0$ и $k<0$ состоит из поверхностей $S_j(k)$, $1\leqslant j\leqslant\varkappa$, полученных из S_j преобразованием подобия с центром в начале координат и коэффициентом подобия k. Значит, на уравнение

$$P\left(k,\ i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)=f(x),\quad x\in R^n, \tag{1}$$

при $k>0$ и $k<0$ автоматически переносятся все результаты, которые были получены в гл. VII для этого уравнения при $k=1$. В частности, справедливо утверждение об ограниченности оператора *

---

* Всюду ниже $A_k^\mu\equiv A_{k\varkappa}^\mu$, $W_k^\mu\equiv W_{k\varkappa}^\mu$ и т. д. Здесь $\mu=(\mu_1,\dots\mu_\varkappa)$ — вектор с компонентами $\mu_j=\pm 1$, определяющий ориентацию поверхности вещественных нулей многочлена $P(k, \sigma)$ и выбор условий излучения.

$$A_k^\mu : H_\psi^{s-1} \to H_\psi^{s+2m}, \qquad (2)$$

который каждой функции $f \in H^s_{\psi^{-1}}$ ставит в соответствие удовлетворяющее условиям излучения решение уравнения (1). Здесь и ниже через ψ обозначается функция $\exp(-r^2)$, через H^s_φ — пространство Соболева — Слободецкого с весом $\varphi = \varphi(x)$, т. е.

$$\|u\|_{s,\varphi} = \|u\|_{H_\varphi^s} = \|\varphi u\|_{H^s}.$$

(Ограниченность оператора A^μ_k была доказана в случае, когда в качестве веса ψ бралась функция $(1+r^2)^{-\gamma/2}$, $\gamma > 1$.)

В § 1 этой главы будут изучаться аналитические свойства (по параметру k) оператора A^μ_k, в § 2 — аналитические свойства аналогичных операторов, возникающих при решении уравнений во всем пространстве с переменными коэффициентами и решении краевых задач во внешности ограниченной области. В § 3 будет изучено поведение этих операторов в окрестности точки $k=0$. Эти результаты будут использованы в следующей главе при изучении поведения решений нестационарных задач при $t \to \infty$.

Напомним, что аналитическая зависимость оператора от параметра k при $k = k_0$ означает, что в некоторой окрестности точки $k = k_0$ оператор разлагается в ряд Тейлора, сходящийся в равномерной норме.

Очевидно, результаты предыдущих двух глав остаются в силе, если заменить вес $(1+r^2)^{-\gamma/2}$ во встречающихся там пространствах Соболева — Слободецкого на более быстро убывающий (вместе с производными). В этой и последующих главах в качестве веса в этих пространствах будет участвовать только $\psi = \exp(-r^2)$, и мы неоднократно будем ссылаться на результаты предыдущих двух глав, заменяя автоматически пространства $H^s_{-\gamma}$, H_γ^{s+2m} на $H^s_{\psi^{-1}}$, H_ψ^{s+2m} соответственно.

§ 1. Уравнения с постоянными коэффициентами

Через W^μ_k, $\widehat{W}^\mu_k$ ($k>0$ или $k<0$) обозначим пространства функций (удовлетворяющих условиям излучения), которые строятся по оператору $P(k, i\partial/\partial x)$ точно так же, как в гл. VII строились пространства W^μ, $\widehat{W}^\mu$, по оператору $P(i\partial/\partial x)$. Пространства W^μ_k, $\widehat{W}^\mu_k$ отличаются от W^μ, $\widehat{W}^\mu$ только тем, что при их определении нужно в формулах (46), (46′) гл. VII заменить функцию $\mu_s(\omega)$ на $k\mu_s(\omega)$ при $k>0$ или на $|k|\mu_s(-\omega)$ при $k<0$.

Оператор (2), который функциям $f \in H_\psi^{s-1}$ ставит в соответствие принадлежащее W^μ_k решение уравнения (1), определяется первоначально на функциях с компактным носителем и ограничен (теорема 10 гл. VII). Его продолжение на все пространство H_ψ^{s-1} мы также будем обозначать через A^μ_k. Пространство функций $\overline{W}_k^\mu$, удовлетворяющих условиям излучения в слабом смысле, определяется как область значений оператора (2) (с областью

определения $H_{\psi}^{s}{}_{-1}$). При этом $\overline{W}_k^{\mu} \subset \widehat{W}_k^{\mu}$ если $s \geqslant 1-2m$ (см. замечание 2 к теореме 11 гл. VII). Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Пусть эллиптический оператор $P(i\partial/\partial x)$ удовлетворяет условиям* 1, 2 *и* $s \in R^1$. *Тогда при всех* $k \in R^1$, $k \neq 0$ *существует ограниченный, определенный на всем пространстве* $H_{\psi}^{s}{}_{-1}$ *оператор* (2), *переводящий каждую функцию* $f \in H_{\psi}^{s}{}_{-1}$ *в решение* $u_{\mu} \in \overline{W}_k^{\mu}$ *уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям излучения в слабом смысле, причем* $u_{\mu} \in \widehat{W}_k^{\mu}$, *если* $s \geqslant 1-2m$.

Отметим, что из определения пространств $\widehat{W}_k^{\mu}$ следует, что

$$\widehat{W}_k^{\mu} = \Pi \widehat{W}_{-k}^{\mu}, \quad \overline{W}_k^{\mu} = \Pi \overline{W}_{-k}^{\mu}, \tag{3}$$

где Π — оператор, который каждой функции $v(x)$ ставит в соответствие $v(-x)$. При этом равенства (3) справедливы и без оператора Π, если $P(k, \sigma) = P(k, -\sigma)$ при всех вещественных σ (т. е если оператор P содержит дифференциальные мономы только четного порядка).

Будем обозначать через $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ вектор $\sigma/|\sigma|$, $\sigma \in R^n$. Запишем многочлен $P(k, \sigma)$ в сферических координатах $P = P(k, |\sigma|\alpha)$ и вместо $|\sigma|$ рассмотрим комплексный параметр z. Коэффициентом при z^{2m} у многочлена $P(k, z\alpha)$ является величина $P(0, \alpha) = P_0(\alpha)$, где $P_0(\sigma)$ — старшая однородная часть многочлена $P(\sigma)$. В силу эллиптичности оператора P указанный коэффициент отличен от нуля и, значит, корни относительно z многочлена $P(k, z\alpha)$ являются непрерывными функциями α. При фиксированном $\alpha = \alpha^0$ и $k > 0$ в силу свойства 4, наложенного на оператор P, многочлен $P(k, z\alpha)$ имеет $\varkappa$ положительных корней $z = \varphi_j(\alpha)k$, $\varphi_j > 0$, отвечающих точкам пересечения луча $\alpha = \alpha^0$ с поверхностями $S_j(k)$, и $\varkappa$ отрицательных корней, отвечающих пересечению противоположно направленного луча с этими поверхностями. Других вещественных корней многочлен $P(k, z\alpha)$ не имеет. Учитывая еще однородность многочлена по переменным (k, z), получаем следующее утверждение.

Лемма 1. *Корни многочлена* $P(k, z\alpha)$ *имеют вид* $z = \varphi_j(\alpha)k$, $1 < j < 2m$, *где* $\varphi_j(\alpha) > 0$ *при* $1 < j < \varkappa$ *и существуют такие* $\gamma > 0$ *и* $\gamma_1 > 0$, *что точки* $\varphi_j(\alpha)$, $j > \varkappa$, *находятся вне угла* $\{z : |\arg z| < \gamma\}$ *и вне круга* $\{z : |z| < \gamma_1\}$.

Напомним, что вектор $\mu = (\mu_1 \ldots, \mu_\varkappa)$, компоненты которого равны ± 1, определяет выбор ориентации поверхностей $S_j(k)$ (по вектору нормали $\mu_j \nabla_\sigma T(k, \sigma)$) и тем самым фиксирует однозначно условия излучения. Через δ_j обозначается константа 1 или -1 в зависимости от того, будет ли вектор нормали $\mu_j \nabla T$ внешним или внутренним по отношению к ограниченной области с границей $S_j(k)$.

Обозначим через $l(\alpha, \mu, k)$, $k > 0$, контур в комплексной плоскости z, который получается в результате деформации полуоси $z > 0$ в окрестности точек $z = \varphi_j(\alpha)k$, $1 < j < \varkappa$, в полуплоскость

$\operatorname{Im} z>0$, если $\delta_j=1$, и в полуплоскость $\operatorname{Im} z<0$, если $\delta_j=-1$. Точка $z=0$ должна оставаться концом контура. Кроме того, эта деформация должна быть настолько малой, чтобы в ее процессе не приходилось проходить через точки $z=\varphi_j(\alpha)k$, $j>\varkappa$, т. е. контур l должен быть таким, чтобы на самом контуре, а также в области между l и полуосью $z>0$ не было точек $z=\varphi_j(\alpha)k$, $k>0$. Контур l, очевидно, можно считать гладким и гладко зависящим от α и $k>0$.

Пусть $f(x)\in C_0^\infty(R^n)$. Тогда $\tilde{f}(\sigma)$ аналитична и убывает на бесконечности быстрее $|\sigma|^{-N}$ при любом N. Поэтому интеграл

$$u_\mu(x, k)=(2\pi)^{-n}\int\limits_{|\alpha|=1}\int\limits_{l(\alpha,\mu,k)} z^{n-1}\frac{\tilde{f}(z\alpha)\,e^{-iz(\alpha,x)}}{P(k, z\alpha)}\,dz\,d\alpha \qquad (4)$$

определен и не зависит от точного вида контура l, построенного указанным выше способом. Отправной точкой для изучения аналитических свойств оператора $A^\mu{}_k$ является

Лемма 2. *Если P — эллиптический оператор, удовлетворяющий условиям* 1, 2 *и* 4 *и* $f\in C_0^\infty(R^n)$, *то функция* $u_\mu=A^\mu{}_k f$ *дается формулой* (4).

Это утверждение можно доказать непосредственно, опираясь на теорему 6 и формулу (13) гл. VII. Но еще проще сделать это, предварительно установив полезную не только для доказательства леммы 2 связь между аналитичностью оператора $A^\mu{}_k$ и принципом предельного поглощения.

Обозначим через μ^1 (μ^2) тот из векторов μ, при котором ориентация сразу всех поверхностей $S_j(k)$ задается вектором внешней (внутренней) нормали. Вектору μ^1 соответствуют константы δ_j, $1<j<\varkappa$, все равные единице, а вектору μ^2 соответствуют $\delta_j=-1$, $1<j<\varkappa$. Компоненты $\mu_j{}^{1,2}$ векторов $\mu^{1,2}$ можно определить из условий

$$\mu^1{}_j=\operatorname{sign}\langle\sigma, \nabla_\sigma T(k, \sigma)\rangle,\ \sigma\in S_j(k);\ \mu^2{}_j=-\mu^1{}_j. \qquad (5)$$

Действительно, если вектор $\mu_j\nabla_\sigma T(k, \sigma)$, $\sigma\in S_j(k)$, определяющий ориентацию поверхности $S_j(k)$, является вектором внешней (внутренней) нормали, то в силу условия 4, наложенного на оператор P, он должен образовывать острый (тупой) угол с вектором σ. Пространства $W_k^{\mu^1}$, $W_k^{\mu^2}$ будем называть первым и соответственно вторым нормальным пространством. Операторы $A^\mu{}_k$ при $\mu=\mu^1$ и $\mu=\mu^2$ будем для краткости обозначать через $A^1{}_k$, $A^2{}_k$ соответственно.

Рассмотрим следующее уравнение, близкое к уравнению (1):

$$T\left(k_0\mp i\varepsilon, i\frac{\partial}{\partial x}\right)P_1\left(k_0, i\frac{\partial}{\partial x}\right)u_\varepsilon^\pm=f,\ f\in C_0^\infty, \qquad (6)$$

где $k_0>0$, $\varepsilon\neq0$. Многочлен $T(k_0\mp i\varepsilon, \sigma)$ запишем в виде

$$T(k_0\mp i\varepsilon, \sigma)=T(k_0, \sigma)+i\varepsilon Q_\pm(\varepsilon, \sigma). \qquad (7)$$

Конечно, многочлены $Q_\pm$ тоже зависят от k_0. Напомним, что в §3 гл. VII было определено понятие соответствия оператора Q вектору μ, позволяющее получать решения уравнения (1) предельным переходом из решений близких уравнений.

Лемма 3. *Существует такое $\tilde{\varepsilon}>0$, что при $0<\varepsilon\leqslant\tilde{\varepsilon}$ оператор $Q_+(\varepsilon, i\partial/\partial x)$ (Q_-) соответствует вектору $\mu^1(\mu^2)$ и, значит, при $0<\varepsilon\leqslant\tilde{\varepsilon}$, уравнение* (6) *однозначно разрешимо в пространстве S', решение $u^\pm_\varepsilon\in S'$ равно*

$$u_\varepsilon^\pm=(2\pi)^{-n}\int\limits_{R^n}\frac{\tilde{f}(\sigma)\,e^{-i(\sigma,x)}}{T(k_0\mp i\varepsilon,\sigma)\,P_1(k_0,\sigma)}\,d\sigma \tag{8}$$

и сходится в пространстве S' при $\varepsilon\to+0$ к решению $A^1_{k_0}f\,(A^2_{k_0}f)$ уравнения (1).

Доказательство. Из леммы 1 следует, что $T(k_0\mp i\varepsilon,\sigma)\neq0$ при $\sigma\in R^n$ и любом $\varepsilon>0$ таком, что $\operatorname{tg}(\varepsilon/k_0)<\gamma$, где константа γ определена в лемме 1. Для доказательства соответствия оператора Q_+ (Q_-) вектору μ^1 (μ^2) остается проверить, что при $\sigma\in S_j(k_0)$, $1\leqslant j\leqslant\varkappa$, выполнены соотношения

$$\mu^1{}_jQ_+(0,\ \sigma)>0,\quad \mu^2{}_jQ_-(0,\ \sigma)<0. \tag{9}$$

Из (7) следует, что $Q_\pm(0,\ \sigma)=\mp T'_k(k_0,\ \sigma)$. А так как в силу однородности многочлена $T(k,\ \sigma)$ при $T(k,\ \sigma)=0$ справедливо соотношение $kT'_k+<\sigma,\ \nabla_\sigma T>=0$, то при $\sigma\in S_j(k_0)$, $1\leqslant j\leqslant\varkappa$, имеем $Q_\pm(0,\ \sigma)=\pm k_0^{-1}<\sigma,\ \nabla_\sigma T(k_0,\ \sigma)>$. Вместе с (5) это доказывает справедливость неравенств (9). Остальные утверждения леммы 3 являются следствием теоремы 9 гл. VII. ■

Доказательство леммы 2. Поскольку $f\in C_0^\infty(R^n)$, то $\tilde{f}(\sigma)$ убывает при $|\sigma|\to\infty$ быстрее $|\sigma|^{-N}$ при любом N и интеграл (8) абсолютно сходится. Перейдем в нем к сферическим координатам:

$$u_\varepsilon^\pm=(2\pi)^{-n}\int\limits_{|\alpha|=1}\int\limits_0^\infty z^{n-1}\frac{\tilde{f}(z\alpha)\,e^{-iz(\alpha,x)}}{T(k_0\mp i\varepsilon,\ z\alpha)\,P_1(k_0,\ z\alpha)}\,dz\,d\alpha. \tag{10}$$

Из леммы 1 следует существование такой окрестности V положительной полуоси комплексной плоскости z, что при достаточно малых $\varepsilon>0$ все корни (относительно z) знаменателя подынтегрального выражения в (10), кроме корней $z_j^\pm=\varphi_j(\alpha)(k_0\mp i\varepsilon)$, $1\leqslant j\leqslant\varkappa$, находятся вне V. Поскольку точки $z_j^\pm$, $1\leqslant j\leqslant\varkappa$, лежат в полуплоскости $\mp\operatorname{Im}z>0$, а функция $\tilde{f}(z\alpha)$ — целая, то интеграл (10) не изменится, если в нем заменить интегрирование по полуоси $z>0$ на интегрирование по контуру $l_\pm(\alpha)$, получающемуся, если указанную полуось продеформировать, слегка сдвинув в окрестности точек $\varphi_j(\alpha)k_0$, $1\leqslant j\leqslant\varkappa$, в полуплоскость $\pm\operatorname{Im}z>0$. После этого в формуле (10) можно будет равномерно по x на любом компакте в R^n перейти к пределу при $\varepsilon\to+0$. Поскольку $\tilde{f}(\sigma)$

убывает при $|\sigma|\to\infty$ быстрее $|\sigma|^{-N}$ с любым N, то указанный предел существует и совпадает с функцией (4) при $\mu=\mu^j$, $j=1, 2$, соответственно. Вместе с леммой 3 это доказывает справедливость утверждения леммы 2 при $\mu=\mu^j$, $j=1, 2$.

Далее, из формулы (4) и леммы 1 следует, что при любом μ разность $u_{\mu^1}-u_\mu$ функций, определенных формулой (4), равна

$$u_{\mu^1}-u_\mu=-(2\pi)^{1-n}\sum\int\limits_{|\alpha|=1}\left\{\left[z^{n-1}\frac{\tilde f(z\alpha)\,e^{-iz(\alpha,x)}}{T_z'(k,z\alpha)\,P_1(k,z\alpha)}\right]\Bigg|_{z=\varphi_j(\alpha)k}\right\}d\alpha, \tag{11}$$

где суммирование идет по тем j, для которых $\mu_j^1\neq\mu_j$. Очевидно, при $z>0$

$$T_z'(k,z\alpha)=\left\langle\nabla_\sigma T(k,\sigma),\frac{\sigma}{|\sigma|}\right\rangle=\mu_j^1\left|\left\langle\nabla_\sigma T(k,\sigma),\frac{\sigma}{|\sigma|}\right\rangle\right|.$$

Последнее равенство следует из (5). Вместе с формулой

$$dS=\frac{|\langle\nabla_\sigma T,\sigma\rangle|}{|\nabla_\sigma T|\cdot|\sigma|}\,|\sigma|^{n-1}\,d\alpha$$

для площади элемента поверхности $S_j(k)$ это показывает, что разность (11) совпадает с разностью $A^1{}_kf-A^{\mu}{}_kf$, вычисленной с помощью формулы (13) гл. VII. Поскольку $u_{\mu^1}=A^1{}_kf$, отсюда следует, что $u_\mu=A^\mu{}_kf$ при любом μ. ■

Основной инструмент, позволяющий доказывать аналитичность оператора $A^\mu{}_k$, дает

Лемма 4. *Пусть U — некоторая ограниченная область комплексной плоскости k и $L=L(\alpha, k)$ — контур в комплексной плоскости z, определенный при $k\in U$, $|\alpha|=1$ и удовлетворяющий следующим условиям:* 1) *контур L непрерывен и состоит из конечного числа непрерывно дифференцируемых кусков, непрерывно дифференцируемо зависящих от $k\in U$ и α, $|\alpha|=1$;* 2) *либо контур L замкнут, либо положение его концов не зависит от k;* 3) *существует такое $R>0$, что либо контур L находится целиком внутри круга $|z|<R$, либо вне этого круга контур L совпадает с лучом $\{z:\operatorname{Im}z=0,\ \operatorname{Re}z>R\}$;* 4) *длина части $L_1=L\cap\{z:|z|<R\}$ контура L ограничена константой, не зависящей от k и α;* 5) *$P(k, z\alpha)\neq0$ при $z\in L(\alpha, k)$.*

Тогда при любом $s\geqslant0$ оператор $\mathfrak{L}_k$, который каждой функции $f\in C_0^\infty(R^n)$ ставит в соответствие

$$u_k(x)=\mathfrak{L}_kf=\int\limits_{|\alpha|=1}\ \int\limits_{L(\alpha,k)}z^{n-1}\frac{\tilde f(z\alpha)\,e^{-iz(\alpha,x)}}{P(k,z\alpha)}\,dz\,d\alpha, \tag{12}$$

продолжается до ограниченного оператора из пространства H_φ^{s-1} в H_φ^{s+2m}, аналитически зависящего от $k\in U$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что из наложенных на контур L условий вытекает существование такой константы $h<\infty$, что $|\operatorname{Im} z|<h$ при $z\in L$ и, значит, при $z\in L$

$$|\tilde{f}(z\alpha)|\leqslant \int_{R^n}|f(x)e^{iz(\alpha,x)}|\,dx\leqslant \int_{R^n}|f(x)|e^{h\psi}\,dx\leqslant C\|f\|_{0,\psi^{-1}}\leqslant C\|f\|_{s,\psi^{-1}}. \tag{13}$$

Из леммы 1 следует, что константу $R>0$ можно считать настолько большой, что $P(k,z\alpha)\neq 0$ при $|z|\geqslant R$ и $k\in U$. Пусть $\theta(\sigma)=1$ при $|\sigma|\geqslant R$ и $\theta(\sigma)=0$ при $|\sigma|<R$. Так как $f\in C_0^\infty(R^n)$, то $\tilde{f}(\sigma)$ убывает при $|\sigma|\to\infty$ быстрее $|\sigma|^{-N}$ при любом N. Значит, интеграл (12) по области $|\sigma|>R$ абсолютно сходится и формулу (12) можно записать так:

$$u_k(x)=\int_{|\alpha|=1}\int_{L_1(\alpha,k)} z^{n-1}\frac{\tilde{f}(z\alpha)e^{-iz(\alpha,x)}}{P(k,z\alpha)}\,dz\,d\alpha+\int_{R^n}\frac{\theta(\sigma)\tilde{f}(\sigma)e^{-i(\sigma,x)}}{P(k,\sigma)}\,d\sigma. \tag{14}$$

Если весь контур $L(\alpha,k)$ находится в круге $|z|\leqslant R$, то второго слагаемого в правой части формулы (14) не будет. От этого доказательство леммы только упростится. Обозначим первое слагаемое, стоящее в правой части равенства (14), через $u^1_k(x)$, второе — через $u^2_k(x)$. Оценим каждое из них в отдельности. Дифференцируя функцию $u^1_k(x)$, внесем производные под знак интеграла и, оценивая по модулю подынтегральное выражение, учитывая условия, наложенные на $L(\alpha,k)$, получим, что при любом $p=(p_1,\dots,p_n)$

$$|D^p u_k^1(x)|\leqslant C_p(k)\max_{|\alpha|=1}\ \max_{z\in L_1(\alpha,k)}|\tilde{f}(z\alpha)e^{-iz(\alpha,x)}|\leqslant C_p(k)e^{h\psi}\|f\|_{s,\psi^{-1}} \tag{15}$$

Последняя оценка вытекает из (13) и того, что $|\operatorname{Im} z|<h$ при $z\in L$. Из (15) следует, что

$$\|u_k^1\|_{s+2m,\psi}\leqslant C(k)\|f\|_{s,\psi^{-1}}. \tag{16}$$

Далее,

$$\|u_k^2\|_{s+2m}=(2\pi)^n\left\|\frac{\theta(\sigma)\tilde{f}(\sigma)(1+|\sigma|^2)^{\frac{s+2m}{2}}}{P(k,\sigma)}\right\|_0.$$

Так как $P(k,\sigma)\neq 0$ при $|\sigma|\geqslant R$ и $k\in U$, то при $k\in U$

$$\left|\frac{\theta(\sigma)}{P(k,\sigma)}\right|<\frac{C}{(1+|\sigma|^2)^m}.$$

Значит,

$$\|u_k^2(x)\|_{s+2m}\leqslant C\|(1+|\sigma|^2)^{s/2}\tilde{f}(\sigma)\|_0=C\|f(x)\|_s\leqslant C\|f\|_{s,\psi^{-1}}.$$

А так как

$$\|u(x)\|_{s+2m,\psi} \leqslant C \|u(x)\|_{s+2m},$$

то из этих последних двух оценок и оценки (16) следует ограниченность оператора $\mathfrak{L}_k$ при $k \in U$, как оператора из пространства $H^s_{\psi^{-1}}$ в H^{s+2m}_{ψ} с областью определения $C_0^\infty(R^n)$. Поскольку функции из $C_0^\infty(R^n)$ плотны в $H^s_{\psi^{-1}}$, то оператор можно продолжить на все пространство $H^s_{\psi^{-1}}$.

Докажем аналитичность оператора $\mathfrak{L}_k$. Так как $f \in C_0^\infty(R^n)$, то функция $\tilde{f}(\sigma)$ является аналитической и, значит, $\tilde{f}(z\alpha)$ — целая функция $z \in \mathbb{C}$. Возьмем произвольную точку $\bar{k} \in U$ и заметим, что так как корни многочлена $P(k, z\alpha)$ непрерывно зависят от k, а подынтегральное выражение в формуле (12) аналитически зависит от z, то существует настолько малая окрестность $\bar{U} \subset U$ точки $\bar{k}$, что в формуле (12) при всех $k \in \bar{U}$ можно взять один и тот же контур интегрирования $L(\alpha, \bar{k})$; причем $P(k, z\alpha) \neq 0$ при $k \in \bar{U}$ и $z \in L(\alpha, \bar{k})$. После того, как мы зафиксировали контур интегрирования в (12), можно, дифференцируя равенство (12) по k, внести производную под знак интеграла. После этого для производной легко получить ту же оценку, что и для оператора $\mathfrak{L}_k$, т. е. совершенно тем же методом, каким доказывалась ограниченность оператора $\mathfrak{L}_k$, доказывается ограниченность оператора $d\mathfrak{L}_k/dk$, что эквивалентно аналитичности оператора $\mathfrak{L}_k$. ■

Будем через [0] обозначать оператор, переводящий все пространство в нуль. При доказательстве следующего утверждения используются методы, развитые в теории ветвления интегралов, зависящих от параметра (см., например, [70]).

Теорема 2. *Пусть эллиптический оператор $P(i\partial/\partial x)$ удовлетворяет условиям 1, 2 и 4. Тогда оператор A^μ_k, $k > 0$, как ограниченный оператор из $H^s_{\psi^{-1}}(R^n)$ в $H^{s+2m}_{\psi}(R^n)$, $s \geqslant 0$, продолжается аналитически в комплексную плоскость параметра k.*

Аналитическое продолжение этого оператора (которое также будем обозначать через A^μ_k) обладает следующими свойствами:

1. *Если n нечетно и $n < 2m$, то оператор A^μ_k является аналитической функцией параметра k для всех комплексных $k \neq 0$, имеющей в точке $k=0$ полюс порядка не выше $2m-n$. Если разложение оператора A^μ_k в ряд Лорана в окрестности точки $k=0$ имеет вид*

$$A^\mu_k = \sum_{j=1}^{2m-n} \frac{N^\mu_j}{k^j} + N^\mu(k),$$

где $N^\mu(k)$ — аналитическая функция параметра k, то операторы N^μ_j являются конечномерными и переводят любую функцию из $H^s_{\psi^{-1}}(R^n)$ в многочлен порядка не выше $2m-n-j$.

2. *Если n нечетно и $n>2m$, то оператор A^{μ}_k является целой функцией параметра k.*

3. *Если n четно и $n\leqslant 2m$, то оператор A^{μ}_k представим в виде*

$$A^{\mu}_k=F^{\mu}_k\ln k+M^{\mu}_k, \tag{17}$$

где F^{μ}_k и M^{μ}_k являются ограниченными операторами из $H^s_{\psi-1}(R^n)$ в $H^{s+2m}_{\psi}(R^n)$, оператор F^{μ}_k является целой функцией параметра k, а оператор M^{μ}_k является аналитической функцией параметра для всех комплексных $k\neq 0$, имеющей в точке $k=0$ полюс порядка не выше $2m-n$. Если $n<2m$ и разложение в ряд Лорана в окрестности точки $k=0$ для оператора M^{μ}_k имеет вид

$$M^{\mu}_k=\sum_{j=1}^{2m-n}\frac{N^{\mu}_j}{k^j}+N^{\mu}(k),$$

где $N^{\mu}(k)$ — аналитическая функция параметра k, то операторы N^{μ}_j являются конечномерными и переводят любую функцию из $H^s_{\psi-1}(R^n)$ в многочлен порядка не выше $2m-n-j$. Операторы $\frac{d^j}{dk^j}F^{\mu}_k|_{k=0}$ $(j\geqslant 0)$ являются конечномерными и переводят любую функцию из $H^s_{\psi-1}(R^n)$ в многочлен порядка не выше $j+2m-n$.

4. *Если n четно и $n>2m$, то оператор A^{μ}_k представим в виде* (17), *где F^{μ}_k и M^{μ}_k являются ограниченными операторами из $H^s_{\psi-1}(R^n)$ в $H^{s+2m}_{\psi}(R^n)$, операторы F^{μ}_k, M^{μ}_k являются целыми функциями параметра k, оператор F^{μ}_k имеет в точке $k=0$ нуль порядка не меньше $n-2m$ и операторы $\frac{d^j}{dk^j}F^{\mu}_k|_{k=0}$ $(j\geqslant n-2m)$ являются конечномерными и переводят любую функцию из $H^s_{\psi-1}(R^n)$ в многочлен порядка не выше $j+2m-n$.*

5. *При всех $k\neq 0$ (а если $n>2m$, то и при $k=0$) функция $A^{\mu}_k f$ является решением уравнения* (1). *При всех значениях параметра k функция $F^{\mu}_k f$ является решением однородного уравнения* (1).

Доказательство. В силу леммы 2 значение оператора A^{μ}_k, $k>0$, на функциях $f\in C_0^{\infty}(R^n)$ дается формулой (4). Для того чтобы показать, что A^{μ}_k является ограниченным оператором из пространства $H^s_{\psi-1}(R^n)$ в $H^{s+2m}_{\psi}(R^n)$, аналитически зависящим от k, построим некоторый контур $l'=l'(\alpha, k, \mu)$ в комплексной плоскости z, такой, что при $f\in C_0^{\infty}(R^n)$ интеграл

$$u_k(x)=A^{\mu}_k f=(2\pi)^{-n}\int\limits_{|\alpha|=1}\int\limits_{l'(\alpha,k,\mu)} z^{n-1}\frac{\tilde{f}(z\alpha)\,e^{-iz(\alpha,x)}}{P(k,z\alpha)}\,dz\,d\alpha \tag{18}$$

будет давать аналитическое продолжение оператора A^{μ}_k, $k>0$. При этом, поскольку точка $k=0$ иногда будет точкой ветвления

для $A^{\mu}{}_{k}$, удобнее записывать k в полярных координатах ρ, $\varphi : \rho = |k|$, $-\infty < \varphi = \arg k < \infty$.

В качестве l' при вещественных $k>0$ возьмем $l(\alpha, k, \mu)$. Покажем, как строится контур l' при $k = \rho \exp(i\varphi)$, $\varphi \neq 0$. Пусть константа $b>0$ такова, что $|\varphi_j(\alpha)| < b/2$, $1 \leqslant j \leqslant 2m$, где функции φ_j определены в лемме 1. Тогда можно считать, что при $|z| \geqslant b\rho$, $\rho>0$, контур $l(\alpha, \rho, \mu)$ совпадает с лучом $q = \{z : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \geqslant b\rho\}$. Обозначим часть контура $l(\alpha, \rho, \mu)$, лежащую в круге $|z| < b\rho$, через $l_1(\alpha, \rho, \mu)$ и через $l'_1 = l'_1(\alpha, \rho, \mu)$ — контур, получающийся из l_1 в результате поворота вокруг точки $k=0$ на угол φ против часовой стрелки. (Это означает поворот на угол $|\varphi|$ по часовой стрелке, если $\varphi<0$.) Контур l' состоит из l'_1, луча q и дуги l'_2 окружности $|z| = b|k|$, соединяющей l'_1 и q. При $\varphi>0$ дуга l'_2 имеет вид $l'_2 = \{z : |z| = b|k|, \varphi \geqslant \arg z \geqslant 0\}$ и несколько раз проходит по окружности $|z| = b|k|$, если $\varphi > 2\pi$. Аналогичный вид имеет l'_2 при $\varphi<0$.

Покажем, что контур интегрирования в (18) при $0<|k|<C$, $|\arg k| < C$ и любом C удовлетворяет всем условиям леммы 4. Требует проверки только тот факт, что $P(k, z\alpha) \neq 0$ при $z \in l'$. Поскольку константа b была выбрана так, что $P(k, z\alpha) \neq 0$ при $|z| \geqslant b|k|$, то достаточно показать, что $P(k, z\alpha) \neq 0$ при $z \in l'_1$. Для этого возьмем любое $k_0 = \rho_0 \exp(i\varphi_0)$ и напомним, что $P(\rho_0, z\alpha) \neq 0$ при $z \in l_1(\alpha, \rho_0, \mu)$. Далее, из леммы 1 следует, что корни (по z) многочлена $P(k, z\alpha)$ при $k = k_0$ можно получить, повернув корни многочлена $P(\rho_0, z\alpha)$ вокруг начала координат против часовой стрелки на угол φ_0. Точно так же получается $l'_1(\alpha, k_0, \mu)$ из $l_1(\alpha, \rho_0, \mu)$. Значит, $P(k, z\alpha) \neq 0$ при $z \in l'_1$.

Таким образом, к интегралу (18) применима лемма 4 и, значит, оператор $A^{\mu}{}_{k}$, значение которого на функциях $f \in C_0^\infty(R^n)$ дается формулой (18), продолжается на все пространство $H^s_{\psi^{-1}}(R^n)$, как ограниченный оператор из $H^s_{\psi^{-1}}$ в H^{s+2m}_{ψ}, аналитически зависящий от k при $k \neq 0$. При $\arg k = 0$ он превращается в оператор (4), аналитическое продолжение которого нам и нужно было построить.

Исследуем поведение оператора $A^{\mu}{}_{k}$ в окрестности точки $k=0$. Найдем приращение $F^{\mu}{}_{k}$, которое получает оператор $A^{\mu}{}_{k}$ при обходе параметра k против часовой стрелки вокруг точки $k=0$. Оператор $F^{\mu}{}_{k}$ является ограниченным оператором в тех же пространствах, в каких ограничен оператор $A^{\mu}{}_{k}$ и, значит, его достаточно определить на функциях из $C_0^\infty(R^n)$. Из построения контура l' вытекает, что при $f \in C_0^\infty(R^n)$

$$\widehat{F}^{\mu}_{k} f = (2\pi)^{-n} \int\limits_{|\alpha|=1} \int\limits_{|z|=b|k|} z^{n-1} \frac{\tilde{f}(z\alpha)\, e^{-iz(\alpha, x)}}{P(k, z\alpha)}\, dz\, d\alpha. \tag{19}$$

Из леммы 4 следует, что формула (19) определяет ограниченный оператор из пространства $H^s_{\psi^{-1}}$ в H^{s+2m}_{ψ}, аналитически зависящий

от параметра k при $k \neq 0$, а из оценки (13) следует, что формулой (19) можно пользоваться при любых $f \in H^s_{\psi^{-1}}$. При $|k| < b^{-1}$ оператор $\widehat{F}^\mu_k$ можно представить в виде

$$\widehat{F}^\mu_k f = (2\pi)^{-n} \int\limits_{|\alpha|=1} \int\limits_{|z|=1} z^{n-1} \frac{\tilde{f}(z\alpha) e^{-iz(\alpha, x)}}{P(k, z\alpha)} dz d\alpha. \tag{20}$$

Применяя лемму 4 к формуле (20), получаем, что оператор $\widehat{F}^\mu_k$ аналитически продолжается и в точку $k=0$, т. е. оператор $\widehat{F}^\mu_k$ является целой функцией k.

Рассмотрим оператор

$$M^\mu_k = A^\mu_k - F^\mu_k \ln k, \; F^\mu_k = \frac{1}{2\pi i} \widehat{F}^\mu_k. \tag{21}$$

Очевидно, при $k \neq 0$ он является ограниченным оператором из $H^s_{\psi^{-1}}$ в H^{s+2m}_ψ, аналитически зависящим от параметра k и является однозначной функцией k.

Заметим еще, что $\widehat{F}^\mu_k \equiv [0]$ при нечетных n. Для доказательства этого факта достаточно сделать в интеграле (19) замену: $z = -z_1$, $\alpha = -\alpha_1$. При этом получим, что $\widehat{F}^\mu_k = (-1)^n \widehat{F}^\mu_k$, т. е. $\widehat{F}^\mu_k \equiv [0]$ при нечетных n.

Таким образом, доказано, что при нечетных n оператор A^μ_k является однозначной аналитической функцией параметра k для всех комплексных $k \neq 0$, а при четных n он представим в виде (17), где оператор F^μ_k является целой функцией параметра k и имеет вид (19), а M^μ_k является однозначной аналитической функцией параметра k для всех комплексных $k \neq 0$.

Докажем теперь утверждения теоремы 2, относящиеся к оператору F^μ_k. Для этого заметим, прежде всего, что из эллиптичности оператора $P(i\partial/\partial x)$ следует, что $P(0, z\alpha) = z^{2m} g(\alpha)$, $g(\alpha) \neq 0$. Разложим функцию $1/P(k, z\alpha)$ в ряд Лорана по z в окрестности бесконечности. Очевидно, это разложение будет иметь вид

$$\frac{1}{P(k, z\alpha)} = \sum_{l=0}^{\infty} q_l(\alpha) \frac{k^l}{z^{2m+l}}, \quad |q_l(\alpha)| < C_l, \quad q_0(\alpha) \equiv \frac{1}{g(\alpha)}, \tag{22}$$

причем из определения константы b следует, что ряд (22) и все его производные по k и z сходятся равномерно при $|k| < b^{-1}$ и $|z| \geqslant 1$.

Из (20), (22) следует, что при $j \geqslant 0$

$$\frac{d^j}{dk^j} F^\mu_k f|_{k=0} = \frac{(-i) j!}{(2\pi)^{n+1}} \int\limits_{|\alpha|=1} \int\limits_{|z|=1} z^{n-2m-j-1} q_j(\alpha) \tilde{f}(z\alpha) e^{-iz(\alpha, x)} dz d\alpha. \tag{23}$$

Выражение, стоящее в правой части формулы (23), можно дифференцировать по x под знаком интеграла. Применяя затем теорему Коши к интегралу по окружности $|z|=1$, получаем, что

производные по x от функций $\frac{d^j}{dk^j} F_k^\mu f|_{k=0}$, $j=0, 1, \ldots$, порядок которых больше, чем $j+2m-n$, равны нулю. Отсюда следует: 1) если $2m-n\geqslant 0$, то при всех $j\geqslant 0$ функция $\frac{d^j}{dk^j} F_k^\mu f|_{k=0}$ является многочленом порядка не выше $j+2m-n$, 2) если $2m-n<0$, то оператор F^μ_k имеет в точке $k=0$ нуль порядка не меньше, чем $n-2m$, и при всех $j\geqslant n-2m$ функция $\frac{d^j}{dk^j} F_k^\mu f|_{k=0}$ является многочленом порядка не выше $j+2m-n$.

Для того чтобы доказать, что функция $F^\mu_k f$ при всех k является решением однородного уравнения (1), достаточно заметить, что можно дифференцировать под знаком интеграла выражения, стоящие в правой части формул: (19) — при $k\neq 0$ и (20) — при $|k|<b^{-1}$.

Теперь доказаны все утверждения теоремы 2, относящиеся к оператору F^μ_k.

Предположим, что для оператора A^μ_k при достаточно малых значениях $|k|$ и $0<\arg k<2\pi$ справедлива оценка

$$\|A_k^\mu f\|_{s+2m,\psi} \leqslant C\varphi(|k|)\|f\|_{s,\psi^{-1}}, \tag{24}$$

где $\varphi(|k|)=1$, если $n>2m$; $\varphi(|k|)=\ln(1/|k|)$, если $n=2m$ и $\varphi(|k|)=|k|^{n-2m}$, если $n<2m$. Тогда, учитывая полученные выше результаты для операторов F^μ_k и M^μ_k, отсюда получаем, что A^μ_k есть целая функция k, если n нечетно и $n>2m$, что A^μ_k имеет в точке $k=0$ полюс порядка не выше $2m-n$, если n нечетно и $n<2m$, а также, что M^μ_k есть целая функция k, если n четно и $n\geqslant 2m$, и M^μ_k имеет в точке $k=0$ полюс порядка не выше $2m-n$, если n четно и $n<2m$.

Таким образом, для доказательства теоремы 2 достаточно: 1) получить оценку (24), 2) исследовать область значений операторов, которые являются коэффициентами при отрицательных степенях k в рядах Лорана для операторов: A^μ_k — при нечетном $n<2m$ и M^μ_k — при четном $n<2m$, 3) доказать утверждение 5 теоремы 2.

Переходим к доказательству оценки (24). Совершенно аналогично тому, как при доказательстве леммы 4 формула (12) была записана в виде (14), так теперь представим интеграл (18) при $f\in C_0^\infty(R^n)$ и $|k|<b^{-1}$ в виде суммы

$$A_k^\mu f = v_k(x) + w_k(x), \tag{25}$$

$$v_k(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{|\sigma|>1} \frac{\tilde{f}(\sigma)\, e^{-i\langle\sigma,x\rangle}}{P(k,\sigma)}\, d\sigma, \tag{26}$$

$$w_k(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{d(\alpha,k,\mu)} z^{n-1}\, \frac{\tilde{f}(z\alpha)\, e^{-iz\langle\alpha,x\rangle}}{P(k,z\alpha)}\, dz d\alpha, \tag{27}$$

где $d(\alpha, k, \mu)$ — часть контура $l'(\alpha, k, \mu)$, лежащая в круге $|z|<1$. Оценим каждое из этих слагаемых в отдельности. Пусть $\theta(\sigma)=0$ при $|\sigma|<1$ и $\theta(\sigma)=1$ при $|\sigma|>1$. Тогда поскольку $P(k, \sigma)\neq 0$ при $|k|<b^{-1}$ и $|\sigma|>1/2$, то при $|k|<b^{-1}$

$$\frac{\theta(\sigma)}{|P(k, \sigma)|}<\frac{C}{(1+|\sigma|^2)^m},$$

где константа C не зависит от k. Поэтому

$$\|v_k\|_{s+2m,\psi}\leqslant C\|v_k\|_{s+2m}=C\left\|\theta(\sigma)\frac{(1+|\sigma|^2)^{\frac{s+2m}{2}}}{P(k, \sigma)}\tilde{f}(\sigma)\right\|_0\leqslant$$
$$\leqslant C\|(1+|\sigma|^2)^{s/2}\tilde{f}(\sigma)\|_0=C\|f(x)\|_s\leqslant C\|f(x)\|_{s,\psi^{-1}}. \qquad (28)$$

Прежде чем приступать к оценке функции $w_k(x)$, заметим, что контур $l'(\alpha, k, \mu)$ можно было строить так: построить его сначала для значений k, для которых $|k|=1$, а потом в качестве $l'(\alpha, k, \mu)$ взять контур, который получается из $l'\left(\alpha, \frac{k}{|k|}, \mu\right)$ преобразованием подобия с центром в начале координат и коэффициентом подобия, равным $|k|$. Из эллиптичности оператора $P(i\partial/\partial x)$ и того, что $P(k, z\alpha)\neq 0$ при $z\in l'(\alpha, k, \mu)$ следует, что при $z\in$ $\in l'(\alpha, k, \mu)$, $|k|=1$, и $0<\arg k<2\pi$ справедлива оценка

$$|P(k, z\alpha)|\geqslant C(1+l^{2m}).$$

где l — расстояние вдоль контура $l'(\alpha, k, \mu)$ от начала координат до точки $z\in l'(\alpha, k, \mu)$. Но тогда из соображений однородности следует, что при любых значениях $|k|$, $0<\arg k<2\pi$ и $z\in l'(\alpha, k, \mu)$ будет справедлива оценка

$$|P(k, z\alpha)|\geqslant C(|k|^{2m}+l^{2m}). \qquad (29)$$

Так как $|z|<1$ для $z\in d(\alpha, k, \mu)$ и длина контура $d(\alpha, k, \mu)$ при $|k|<b^{-1}$ и $0<\arg k<2\pi$ не превосходит некоторой константы $L<\infty$ и так как, кроме того, для подынтегрального выражения в формуле (27) справедливы соотношения $|z|<l$, $|dz|=al$, то из (27), (29) при $|k|<b^{-1}$, $0<\arg k<2\pi$ и любом $p=(p_1, \dots, p_n)$ вытекает оценка

$$|D^p w_k(x)|\leqslant C\max_{\alpha}\max_{|z|\leqslant 1}|\tilde{f}(z\alpha)\,e^{-iz\langle\alpha,x\rangle}|\int_0^L\frac{l^{n-1+|p|}}{|k|^{2m}+l^{2m}}\,dl\leqslant$$
$$\leqslant C_p e^r\max_{\alpha}\max_{|z|\leqslant 1}|\tilde{f}(z\alpha)|\int_0^L\frac{l^{n-1}}{|k|^{2m}+l^{2m}}\,dl.$$

Отсюда и из (13) при $s\geqslant 0$ получаем

$$\|w_k\|_{s+2m,\psi}\leqslant C\|f\|_{s,\psi^{-1}}\int_0^L\frac{l^{n-1}}{|k|^{2m}+l^{2m}}\,dl.$$

Легко проверяется, что интеграл в правой части последнего неравенства мажорируется функцией $\varphi(|k|)$, что доказывает справедливость оценки (24).

Пусть теперь $n<2m$. Переходим к изучению области значений операторов, которые являются коэффициентами при отрицательных степенях k в рядах Лорана операторов A^{μ}_{k} (n — нечетно) и M^{μ}_{k} (n — четно). Заметим, что каково бы ни было n (четно или нечетно), из доказанных уже утверждений теоремы 2 следует, что при $n<2m$ оператор A^{μ}_{k} представим (и притом однозначно) в виде

$$A^{\mu}_{k}=\sum_{i=1}^{2m-n}\frac{N^{\mu}_{i}}{k^{i}}+B^{\mu}(k), \tag{30}$$

где N^{μ}_{i} и $B^{\mu}(k)$ при $k\neq 0$ — ограниченные операторы из $H^{s}_{\psi^{-1}}$ в H^{s+2m}_{ψ} и при $|k|\ll 1$, $0<\arg k<2\pi$ справедлива оценка

$$\|B^{\mu}(k)f\|_{s+2m,\psi}\leqslant C\ln\frac{1}{|k|}\|f\|_{s,\psi^{-1}}.$$

Здесь операторы N^{μ}_{i} те же, что и в формулировке теоремы 2, $B^{\mu}(k)=N^{\mu}(k)$ при нечетном n, $B^{\mu}(k)=N^{\mu}(k)+F^{\mu}_{0}\ln k$ при четном n.

Нам нужно доказать, что оператор N^{μ}_{i} переводит любую функцию из $H^{s}_{\psi^{-1}}$ в многочлен порядка не выше $2m-n-i$. Из леммы 4 следует, что оператор V_k из $H^{s}_{\psi^{-1}}$ в H^{s+2m}_{ψ}, определенный формулой (26), является целой функцией параметра k. Поэтому для оператора W_k, определенного формулой (27), согласно (25) и (30), будет справедливо разложение:

$$W_k=\sum_{i=1}^{2m-n}\frac{N^{\mu}_{i}}{k^{i}}+\widetilde{B}^{\mu}(k),$$

где N^{μ}_{i} — те же, что и в формуле (30), а $\widetilde{B}^{\mu}(k)$ имеет ту же оценку, что и оператор $B^{\mu}(k)$. Тогда для доказательства интересующих нас фактов относительно операторов N^{μ}_{i} (для n и четных, и нечетных) достаточно получить при $|k|<b^{-1}$ и $0<\arg k<2\pi$ для функции $w_k(x)$, определяемой формулой (27), оценки:

$$\|D^{p}w_k(x)\|_{s+2m,\psi}\leqslant C|k|^{n-2m+|p|}\|f(x)\|_{s,\psi^{-1}}\quad(|p|<2m-n),$$

$$\|D^{p}w_k(x)\|_{s+2m,\psi}\leqslant C\ln\frac{1}{|k|}\|f(x)\|_{s,\psi^{-1}}\quad(|p|=2m-n).$$

Эти оценки можно получить так же, как была получена оценка для $\|w_k\|_{s+2m,\psi}$.

Теперь теорема 2 почти доказана. Осталось только доказать, что функция $u_k=A^{\mu}_{k}f$ при всех $k\neq 0$, а также и при $k=0$, если

$n>2m$, является решением уравнения (1). В силу ограниченности оператора A^{μ_k} достаточно рассмотреть только тот случай, когда $f\in C_0^\infty(R^n)$ (это соображение уже неоднократно использовалось). Но при этих f и $k\neq 0$ функцию (18) можно дифференцировать по x под знаком интеграла ($|\tilde f(\sigma)|$ убывает при $|\sigma|\to\infty$ быстрее любой степени). Тогда

$$P\left(k,\ i\frac{\partial}{\partial x}\right)u_k(x)=(2\pi)^{-n}\int\limits_{|\alpha|=1}\ \int\limits_{l'(\alpha,k,\mu)} z^{n-1}\tilde f(z\alpha)\,e^{-iz<\alpha,\,x>}\,dz\,d\alpha.$$

Так как теперь контур l' эквивалентен вещественной положительной полуоси, то

$$P\left(k,\ i\frac{\partial}{\partial x}\right)u_k(x)=(2\pi)^{-n}\int\limits_{|\alpha|=1}\int\limits_0^\infty|\sigma|^{n-1}\tilde f(|\sigma|\alpha)\,e^{-i<\sigma,\,x>}\,d|\sigma|d\alpha=$$

$$=(2\pi)^{-n}\int\limits_{R^n}\tilde f(\sigma)\,e^{-i<\sigma,\,x>}\,d\sigma=f(x),$$

т. е. функция u_k при $k\neq 0$ является решением уравнения (1). По непрерывности она будет решением этого уравнения и при $k=0$ в том случае ($n>2m$), когда оператор A^{μ_k} имеет предел при $|k|\to 0$, $0<\arg k<2\pi$. ∎

Обозначим через D комплексную плоскость параметра k; если $-\pi<\varphi\leqslant\pi$ — полярный угол в D, то через $D_\alpha\subset D$ $(0<\alpha\leqslant\pi)$ будем обозначать угол $|\varphi|<\alpha$ (точка $k=0$ в D_α не входит). Через D^+_α, D^-_α будем обозначать пересечение D_α с полуплоскостями $\operatorname{Im} k>0$ и $\operatorname{Im} k<0$ соответственно.

Очевидным следствием леммы 1 является

Лемма 5. *Пусть эллиптический оператор $P(i\partial/\partial x)$ удовлетворяет условиям* 1, 2 *и* 4. *Тогда существует такое $\gamma>0$, что $P(k,\sigma)\neq 0$ при всех вещественных σ и $k\in D_\gamma$,* $\operatorname{Im} k\neq 0$. *При этом $\gamma=\pi$ тогда и только тогда, когда $\varkappa=m$.*

Напомним, что через F мы обозначаем оператор преобразования Фурье (от x к σ), через F^{-1} — обратный оператор.

Теорема 3. *Пусть эллиптический оператор $P(i\partial/\partial x)$ удовлетворяет условиям* 1, 2 *и* 4. *Тогда при $k\in D^+_\gamma$ и $k\in D^-_\gamma$ уравнение* (1) *для любых $f\in H^s(R^n)$, $-\infty<s<\infty$, имеет и притом единственное решение, принадлежащее пространству $H^{s+2m}(R^n)$. Это решение дается формулой*

$$u(x)=P_k^{-1}f=F^{-1}\frac{\tilde f(\sigma)}{P(k,\sigma)}. \tag{31}$$

Оператор P_k^{-1}, определяемый формулой (31), *является ограниченным оператором из пространства $H^s(R^n)$ в $H^{s+2m}(R^n)$, аналитически зависящим от параметра k при $k\in D^-_\gamma$, $k\in D^+_\gamma$.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы 3 является тривиальным следствием теоремы 2 гл. VII и леммы 5. Точно так

же, как и теорема 2 гл. VII, доказывается ограниченность оператора $\frac{d}{dk}P_k^{-1}$, $k\in D_\gamma$, $\operatorname{Im} k\neq 0$, что эквивалентно аналитической зависимости от параметра оператора P_k^{-1}. ■

Всюду дальше будут рассматриваться не любые пространства $\overline{W}^{\mu}{}_k$, а только те, при построении которых ориентация сразу всех поверхностей $S_j(k)$ выбирается по вектору внешней нормали или сразу всех — по вектору внутренней нормали; будем называть их соответственно первым или вторым нормальным пространством. Вектор μ, задающий ориентацию поверхностей $S_j(k)$, соответствующую первому или второму нормальному пространству, обозначается соответственно через μ^1 и μ^2, а операторы $A_k^{\mu^1}, A_k^{\mu^2}$ обозначаются, для краткости, через $A^1{}_k$, $A^2{}_k$.

Напомним, что через Π обозначается оператор, который каждой функции $v(x)$ ставит в соответствие функцию $v(-x)$.

Теорема 4. *Пусть эллиптический оператор* $P(i\partial/\partial x)$ *удовлетворяет условиям* 1, 2 *и* 4, $f\in H_\psi^{s}{}^{-1}(R^n)$, $s\geqslant 0$. *Тогда* $A_k^1 f=P_k^{-1}f$ *при* $k\in D_\gamma^-$ *и* $A_k^2 f=P_k^{-1}f$ *при* $k\in D_\gamma^+$, *т. е. функции* $A_k^1 f$ *при* $k\in D_\gamma^-$ *и* $A_k^2 f$ *при* $k\in D_\gamma^+$ *принадлежат* $H^{s+2m}(R^n)$ *и являются решениями уравнения* (1).

Если к тому же $\varkappa=m$ (*и, значит*, $\gamma=\pi$), *то при всех значениях* k *справедливо тождество*

$$A_k^1=\Pi A_{k_1}^2\Pi,\quad k_1=ke^{i\pi}. \tag{32}$$

В частности, при $k=\rho e^{-i\pi}$, $\rho>0$, *функция* $A^1{}_k f$ *является решением уравнения* (1), *принадлежащим второму нормальному пространству* $\overline{W}_k^{\mu^2}$, $k<0$, *а при* $k=\rho e^{i\pi}$, $\rho>0$, *функция* $A^2{}_k f$ *является решением уравнения* (1), *принадлежащим первому нормальному пространству* $\overline{W}_k^{\mu^1}$, $k>0$.

Замечание 1. Значения параметра k, принадлежащие вещественной отрицательной полуоси, мы записываем в виде $k=\rho e^{i\pi}$, $\rho>0$, и в виде $k=\rho e^{-i\pi}$, $\rho>0$. Это связано с тем, что оператор $A^{\mu}{}_k$, согласно теореме 2, имеет в точке $k=0$ при четных n точку ветвления. Формулы $k=\rho e^{\pm i\pi}$, $\rho>0$, указывают, с помощью какого обхода вокруг начала координат получено интересующее нас значение параметра. Аналогичный смысл имеет запись параметра в формуле (32) в виде $k_1=ke^{i\pi}$, а не в виде $k_1=-k$.

Замечание 2. Из теорем 2, 4 следует, что если оператор P_k^{-1}, определенный при $k\in D^-{}_\gamma$ (или при $k\in D^+{}_\gamma$), рассматривать не как оператор из пространства H^s в H^{s+2m}, а как оператор из пространства $H_\psi^{s}{}^{-1}$ в H_ψ^{s+2m}, то он будет аналитически продолжаться по параметру k на комплексную плоскость D или на риманову поверхность функции $\ln k$ (в зависимости от нечетности или четности n). При этом при $k>0$ получится оператор, переводящий функции $f\in H_\psi^{s}{}^{-1}$ в решения уравнения (1), принадлежащие

первому (или второму, если первоначально $k \in D^{+}_{\gamma}$) нормальному пространству $\overline{W}^{\mu}_{k}$.

Доказательство теоремы 4. Эту теорему достаточно доказать только для случая, когда функция $A^{\mu}_{k}f$ при $k>0$ принадлежит первому нормальному классу $\overline{W}^{\mu^1}_{k}$. Второй случай изучается совершенно аналогично.

Теорема 3 утверждает, что при $k \in D^{-}_{\gamma}$ оператор P_k^{-1} является ограниченным оператором из H^s в H^{s+2m}, аналитически зависящим от параметра $k \in D^{-}_{\gamma}$. Но тогда этот оператор является также ограниченным оператором из $H^{s}_{\psi^{-1}}$ в H^{s+2m}_{ψ}, аналитически зависящим от параметра $k \in D^{-}_{\gamma}$. Поскольку оператор $A^1{}_k$ также аналитически зависит от параметра k, для доказательства первого утверждения теоремы 4 достаточно показать существование таких $k_0>0$ и $\varepsilon_0>0$, что $A^1{}_kf=P_k^{-1}f$ при $k=k_0-i\varepsilon$, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ и $f \in C_0^{\infty}(R^n)$.

Оператор $A^1{}_k$ при $k=k_0-i\varepsilon$, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, определен формулой (18). Так как корни многочлена $P(k, z\alpha)$, согласно лемме 1, непрерывно зависят от k, то при достаточно малом $\varepsilon_0>0$ в формуле (18) вместо контура $l'(\alpha, k, \mu^1)$ можно взять контур $l'(\alpha, k_0, \mu^1)$, т. е. при $k=k_0-i\varepsilon$, $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, имеет место формула

$$A^1_k f = (2\pi)^{-n} \int\limits_{|\alpha|=1} \int\limits_{l'(\alpha, k_0, \mu^1)} z^{n-1} \frac{\tilde{f}(z\alpha) e^{-iz\langle\alpha, x\rangle}}{P(k, z\alpha)} dz\, d\alpha. \qquad (33)$$

С другой стороны, при тех же значениях k, если $\varepsilon_0>0$ достаточно мало, функция $P_k^{-1}f$ дается тем же интегралом (33). Это доказывается дословным повторением рассуждений, с помощью которых при доказательстве леммы 2 было показано, чт $u_{\varepsilon}^{-} \to A^1_{k_0} f$ при $\varepsilon \to +0$. В этих рассуждениях нужно только заменить $P_1(k_0, \sigma)$ на $P_1(k_0-i\varepsilon, \sigma)$. Первое утверждение теоремы доказано.

Докажем равенство (32). В силу теоремы 2 операторы $A^1{}_k$ и $\Pi A^2_{k_1} \Pi$ $(k_1 = ke^{i\pi})$ являются ограниченными операторами из пространства $H^{s}_{\psi^{-1}}$ в H^{s+2m}_{ψ}, аналитически зависящими от k. Поэтому достаточно доказать, что они совпадают при $k \in D^{-}_{\pi}$. Но при этих значениях k, согласно уже доказанной части теоремы, функции $u = A^1_k f$ и $v = \Pi A^2_{k_1} \Pi f$ принадлежат H^{s+2m} и функция u удовлетворяет уравнению (1), а $v(-x)$ — уравнению $P(-k, i\partial/\partial x) v(-x) = f(-x)$. Так как $P(-k, i\partial/\partial x) = P(k, -i\partial/\partial x)$, то функция $v(x)$ также удовлетворяет уравнению (1). Теперь из теоремы 3 следует, что $u=v$. Последнее утверждение теоремы следует из утверждения 5 теоремы 2 и равенств (3), (32). ■

§ 2. Уравнения с переменными коэффициентами и задачи во внешности ограниченной области

Пусть $P(x, k, i\partial/\partial x)$ — эллиптический дифференциальный оператор вида

$$P\left(x, k, i\frac{\partial}{\partial x}\right) = P\left(k, i\frac{\partial}{\partial x}\right) + R\left(x, k, i\frac{\partial}{\partial x}\right), \qquad (34)$$

где оператор $P(k, i\partial/\partial x)$ — тот же, что и в предыдущем параграфе, а $R(x, k, i\partial/\partial x)$ — оператор порядка не выше $2m$, полиномиально зависящий от параметра k, причем степень многочлена $R(x, k, \sigma)$ относительно совокупности аргументов (k, σ) не превосходит $2m$. Относительно коэффициентов оператора R предполагается, что они бесконечно дифференцируемы и принадлежат пространству $L_{s,0}$. Заметим, что коэффициенты при производных порядка $2m$ у оператора (34) не зависят от k. Значит, эллиптичность оператора (34) не зависит от значения параметра k.

В этом параграфе рассматривается уравнение во всем пространстве

$$P\left(x, k, i\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = f(x) \tag{35}$$

и эллиптическая задача в области Ω:

$$\begin{cases} P\left(x, k, i\dfrac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = f(x), \ x \in \Omega, \\ B\left(x, k, i\dfrac{\partial}{\partial x}\right) u(x)|_\Gamma = \varphi(x). \end{cases} \tag{36}$$

Здесь $B(x, k, i\partial/\partial x)$ — вектор из операторов $B_j(x, k, i\partial/\partial x)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$, функции $B_j(x, k, \sigma)$ являются многочленами по (k, σ) порядка m_j, где m_j — порядок граничного оператора $B_j(x, k, i\partial/\partial x)$, и выполнены условия Шапиро — Лопатинского. Заметим, что это последнее требование, предъявляемое к задаче (36), также не зависит от значения параметра k, поскольку от k не зависят коэффициенты при старших производных оператора (34) и операторов $B_j(x, k, i\partial/\partial x)$. Для простоты всюду считается, что граница Γ области Ω и коэффициенты операторов $B_j(x, k, i\partial/\partial x)$ бесконечно дифференцируемы.

Как и раньше, через B_d обозначается шар (открытый) радиуса d в R^n_x с центром в начале координат. Через $R_0 > 0$ обозначим константу такую, что граница Γ области Ω лежит в B_{R_0}.

Правая часть в уравнениях (35) и (36) будет предполагаться принадлежащей соответственно пространствам $H^s_{\psi^{-1}}(R^n)$, $H^s_{\psi^{-1}}(\Omega)$, где $\psi = \exp(-r^2)$ и для любой функции $\varphi = \varphi(x)$ через $H^s_\varphi(\Omega)$ обозначается пространство Соболева — Слободецкого с весом φ (см. § 1, где было определено $H^s_\varphi(R^n)$).

В главе VI для зависящих от параметра эллиптических уравнений и краевых задач было определено понятие эллиптичности с параметром. Будем говорить, что уравнение (35) удовлетворяет *условию* b_1 (*условию* b_2), если найдется такой луч $l_{\varphi_0} = \{k : \arg k = \varphi_0\}$, принадлежащий области D^-_γ (соответственно области D^+_γ), что уравнение (35) будет эллиптическим уравнением с параметром $k \in l_{\varphi_0}$. Например, если $R(x, k, \sigma)$ как многочлен относительно (k, σ) имеет степень меньшую, чем $2m$, то условие b_1 (b_2) выполнено, и в качестве l_{φ_0} можно взять любой луч, принадлежа-

щий D^-_γ (D^+_γ). Будем говорить, что для задачи (36) выполнено *условие* c_1 (*условие* c_2), если найдется такой луч l_{φ_0}, принадлежащий области D^-_γ (соответственно D^+_γ), что при $k \in l_{\varphi_0}$ задача (36) является эллиптической задачей с параметром.

Обозначим через $B^1_k(B^2_k)$, $k>0$, оператор из пространства $H^s_{\psi^{-1}}(R^n)$ в $H^{s+2m}_\psi(R^n)$, который каждой функции $f \in H^s_{\psi^{-1}}(R^n)$ ставит в соответствие принадлежащее первому (второму) нормальному пространству $\overline{W}^\mu_k$ решение уравнения (35). Через $H^s_{\psi^{-1}}(\Omega, \Gamma)$ обозначается прямая сумма пространств $H^s_{\psi^{-1}}(\Omega)$ и $H^{s+2m-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, через $C^1_k(C^2_k)$, $k>0$, обозначим оператор из пространства $H^s_{\psi^{-1}}(\Omega, \Gamma)$ в $H^{s+2m}_\psi(\Omega)$, который каждому вектору $(f, \varphi) \in H^s_{\psi^{-1}}(\Omega, \Gamma)$ ставит в соответствие принадлежащее первому (второму) нормальному пространству $\overline{W}^\mu_k(\Omega) \subset H^{s+2m}_\psi(\Omega)$ решение задачи (36). Очевидно, операторы B^i_k, $i=1, 2$, определены при тех и только тех значениях k, для которых уравнение (35) имеет и притом единственное принадлежащее соответствующему нормальному пространству $\overline{W}^\mu_k$ решение при любой $f \in H^s_{\psi^{-1}}(R^n)$. Аналогичное утверждение имеет место и для операторов C^i_k, $i=1, 2$.

В этом параграфе будет изучаться вопрос о существовании операторов B^i_k, C^i_k, $i=1, 2$, а также об их аналитических свойствах относительно параметра k. Всюду ниже предполагается, что индекс s, участвующий в определении встречающихся ниже пространств, таков, что $s \geqslant \max(0, -2m+m_j+1)$.

Обозначим через $\mathscr{D}_n$ область, в которой оператор A^μ_k конечно-мероморфен (определение конечной мероморфности см. в § 4 гл. VI). Согласно теореме 2, область $\mathscr{D}_n$ совпадает со всей комплексной плоскостью k, если n — нечетно, и $\mathscr{D}_n$ — риманова поверхность функции $\ln k$, если n — четно. Напомним, что через $\mathfrak{A}_k$ обозначается оператор, отвечающий задаче (36), который каждой функции $u \in H^{s+2m}$ ставит в соответствие вектор $(f, \varphi) \in H^s(\Omega, \Gamma)$ из правых частей задачи (36).

Этот параграф посвящен доказательству следующих двух теорем.

Теорема 5. *Пусть эллиптический оператор* $P(i\partial/\partial x)$ *удовлетворяет условиям* 1, 2 *и* 4, *коэффициенты оператора* $R(x, k, i\partial/\partial x)$ *принадлежат* $L_{s,0}$, *для задачи* (36) *выполнено условие* c_1 (c_2) *и* $s \geqslant \max(0, -2m+m_j+1)$. *Тогда при* $k \in D^-_\gamma$ (D^+_γ) *оператор*

$$\mathfrak{A}_k : H^{s+2m}(\Omega) \to H^s(\Omega, \Gamma) \tag{37}$$

аналитически (полиномиально) зависит от k *и фредгольмов при каждом значении* $k \in D^-_\gamma$ (D^+_γ), *операторы* $R_k \equiv \mathfrak{A}_k^{-1}$ *при тех же значениях* k *образуют конечно-мероморфное фредгольмово семейство операторов.*

Обозначим через $\widehat{R}_k$ оператор

$$\widehat{R}_k : H^s_{\psi^{-1}}(\Omega, \Gamma) \to H^{s+2m}_{\psi}(\Omega), \tag{38}$$

который получается из оператора R_k, если указанным в (38) способом сузить у оператора R_k область определения, а результат действия оператора рассмотреть в более широком пространстве, т. е.

$$\widehat{R}_k = I_2 R_k I_1, \quad I_1 : H^s_{\psi^{-1}}(\Omega, \Gamma) \to H^s(\Omega, \Gamma), \quad I_2 : H^{s+2m}(\Omega) \to H^{s+2m}_{\psi}(\Omega). \tag{39}$$

Здесь I_1, I_2 — операторы вложения.

Через $L_{s,\psi}$ обозначим пространство функций $r \neq r(x)$, все производные которых до порядка $\{|s|\}$ ведут себя как $o(\psi^2)$ при $|x| \to \infty$.

Теорема 6. *Пусть эллиптический оператор* $P(i\partial/\partial x)$ *удовлетворяет условиям* 1, 2 *и* 4, *коэффициенты оператора* $R(x, k, i\partial/\partial x)$ *принадлежат* $L_{s,\psi}$, *для задачи* (36) *выполнено условие* c_1 (c_2) *и* $s \geqslant \max(0, -2m + m_j + 1)$. *Тогда оператор* $C^1{}_k$ ($C^2{}_k$), $k > 0$, *определен* * *и является ограниченным оператором из пространства* $H^s_{\psi^{-1}}(\Omega, \Gamma)$ *в* $H^{s+2m}_{\psi}(\Omega)$ *при всех значениях* $k > 0$ *за исключением, может быть, некоторого дискретного множества точек. При этом оператор* $C^1{}_k$ ($C^2{}_k$), $k > 0$, *продолжается как конечно мероморфная функция параметра* k *на всю область* $\mathscr{D}_n$. *Это продолжение также будет обозначаться через* $C^i{}_k$, $i = 1, 2$, *а совокупность полюсов оператора* $C^i{}_k$ — *через* Λ_i. *Операторы* $C^i{}_k$ *обладают следующими свойствами:*

1. *При всех* $k \in \mathscr{D}_n \setminus \Lambda_i$ *функция* $C^i{}_k(f, \varphi)$ *удовлетворяет уравнению и граничным условиям задачи* (36).

2. $C^1{}_k = \widehat{R}_k$ *при* $k \in D^-{}_\gamma$, $C^2{}_k = \widehat{R}_k$ *при* $k \in D^+{}_\gamma$. *Полюса оператора* $C^1{}_k$ (*соответственно* $C^2{}_k$), *лежащие в области* $D^-{}_\gamma$ (соответственно $D^+{}_\gamma$) *находятся в тех и только тех точках области* $D^-{}_\gamma$ ($D^+{}_\gamma$), *для которых однородная задача* (36) *имеет нетривиальное решение, принадлежащее* $H^{s+2m}(\Omega)$.

3. *Полюса оператора* $C^1{}_k$ (*соответственно* $C^2{}_k$), *лежащие на полуоси* $k > 0$, *находятся в тех и только тех точках этой полуоси, для которых однородная задача* (36) *имеет нетривиальное решение, принадлежащее первому* (*соответственно второму*) *нормальному пространству* $\overline{W}^{\mu}{}_k(\Omega)$.

4. *Если* $\varkappa = m$ (*и, значит,* $\gamma = \pi$), то *при* $k = \rho e^{-i\pi}$, $\rho > 0$, $k \overline{\in} \Lambda_1$ *функция* $C^1{}_k(f, \varphi)$ *принадлежит второму нормальному пространству* $\overline{W}^{\mu^2}_k(\Omega)$, $k < 0$, *а при* $k = \rho e^{i\pi}$, $\rho > 0$, $k \overline{\in} \Lambda_2$ *функция* $C^2{}_k(f, \varphi)$ *принадлежит первому нормальному пространству* $\overline{W}^{\mu^1}_k(\Omega)$, $k < 0$.

---

* Т. е. задача (36) при всех $(f, \varphi) \in H^s_{\psi^{-1}}(\Omega, \Gamma)$ имеет и притом единственное решение, принадлежащее первому (второму) нормальному пространству $\overline{W}^{\mu}_k(\Omega)$.

5. *Если $\varkappa=m$, то полюса оператора $C^1{}_k$ (соответственно $C^2{}_k$), лежащие на полуоси $k=\rho e^{-i\pi}$, $\rho>0$ (соответственно $k=\rho e^{i\pi}$, $\rho>0$), находятся в тех и только тех точках этой полуоси, для которых однородная задача* (36) *имеет нетривиальное решение, принадлежащее второму* (*соответственно первому*) *нормальному пространству $\overline{W}^{\mu}{}_k(\Omega)$.*

Замечания. 1. Замечание 1 к теореме 4 в равной степени относится к теореме 6.

2. В приложениях часто приходится изучать аналитические свойства решений задачи (36), определенных первоначально вне непрерывного спектра, т. е. при $k\in D^{\pm}{}_{\gamma}$. Эти решения u имеют вид $u=\mathfrak{A}_k{}^{-1}(f, \varphi)$. Согласно теореме 5, оператор $R_k=\mathfrak{A}_k{}^{-1}$ конечно-мероморфен при $k\in D^{\pm}{}_{\gamma}$. Легко видеть, что даже в случае уравнения с постоянными коэффициентами в R^n соответствующий оператор R_k не имеет аналитического продолжения за пределы области $D^{\pm}{}_{\gamma}$. Согласно теореме 6, полученный из оператора R_k оператор $\hat{R}_k$ допускает конечно-мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость, если размерность пространства n нечетна, или на риманову поверхность функции $\ln k$, если n четно. Значит, если вектор (f, φ) из правых частей задачи (36) принадлежит пространству $H^s{}_{\psi-1}(\Omega, \Gamma)$, то решение задачи, определенное первоначально при $k\in D^{\pm}{}_{\gamma}$, как элемент пространства $H_{\psi}{}^{s+2m}(\Omega)$ мероморфно продолжается на область $\mathscr{D}_n$.

В следующих главах мы будем использовать обозначение R_k для оператора $\mathfrak{A}_k{}^{-1}$ и $\hat{R}_k$ — для оператора (39) и для его мероморфного продолжения на $\mathscr{D}_n$, поскольку эти обозначения общеприняты для резольвенты оператора (в том числе и для резольвенты оператора, полиномиально зависящего от спектрального параметра k). При доказательстве теоремы 6 мы тот же оператор $\hat{R}_k$ обозначаем через $C^j{}_k$, $j=1, 2$ (или $B^j{}_k$ в случае уравнения во всем пространстве), чтобы не путать его с дифференциальным оператором $R(x, k, i\partial/\partial x)$ (формула (34)).

3. Заметим, что, продолжая мероморфно операторы $\hat{R}_k$, определенные первоначально при $k\in D^{+}{}_{\gamma}$ или $k\in D^{-}{}_{\gamma}$, мы получаем два разных семейства операторов в $\mathscr{D}_n$ (как в случае четного n, так и в случае нечетного n).

4. Для уравнения (35) справедливы точные аналоги теорем 5, 6, в которых вместо условий c_1 (c_2) предполагаются выполненными условия b_1 (b_2).

Прежде чем доказывать теоремы 5, 6, получим несколько вспомогательных утверждений. Хорошо известна

Лемма 6. *Пусть функции $a(x)$ и $b(\sigma)$ ограничены и стремятся к нулю на бесконечности. Тогда в пространстве $L_2(R^n)$ оператор*

$$G: f(x) \to a(x) \int_{R^n} b(\sigma)\tilde{f}(\sigma)\, e^{-i\langle\sigma, x\rangle}\, d\sigma$$

компактен.

Доказательство. Пусть $\zeta(t)=1$ при $t<1$, $\zeta(t)=0$ при $t>1$, $a_n(x)=a(x)\zeta(|x|/n)$, $b_n(\sigma)=b(\sigma)\zeta(|\sigma|/n)$ и G_n — оператор, который определяется той же формулой, что и G, с заменой a на a_n и b на b_n. Очевидно, $\|G_n-G\|\to 0$ при $n\to\infty$. С другой стороны, оператор G_n компактен, как произведение ограниченного оператора (преобразования Фурье) и интегрального оператора с суммируемым с квадратом ядром $K_n=a_n(x)b_n(\sigma)\exp(-i\langle\sigma, x\rangle)$. ■

Лемма 7. *При любых $k_1, k_2\in\mathscr{D}_n\setminus\{0\}$ оператор $A^\mu_{k_1}-A^\mu_{k_2}$ является ограниченным оператором из пространства $H^{s}_{\psi^{-1}}(R^n)$ в $H^{s+2m+1}_{\psi}(R^n)$.*

Доказательство. Пусть $R>0$ таково, что при всех α и $|z|\geqslant R$ контуры $l'(\alpha, \mu, k_i)$, $i=1, 2$ (формула (18)) идут по лучу $\{z:\operatorname{Im} z=0, \operatorname{Re} z\geqslant R\}$. Тогда при $f\in C_0^\infty(R^n)$ и $k=k_i$, $i=1, 2$, интеграл (18), определяющий оператор A^μ_k, можно записать в виде (14), где $L_1(\alpha, k)$ — часть контура $l'(\alpha, \mu, k)$, лежащая в круге $|z|\leqslant R$. Представим каждый из операторов $A^\mu_{k_i}$ в виде суммы двух слагаемых, соответствующих слагаемым в правой части формулы (14). Тогда поскольку разность $P(k_1, \sigma)-P(k_2, \sigma)$ является многочленом по σ порядка не выше $2m-1$, то легко проверить, что разность вторых слагаемых есть ограниченный оператор из пространства $H^s(R^n)$ в $H^{s+2m+1}(R^n)$, и, значит, она будет ограниченным оператором из $H^{s}_{\psi^{-1}}(R^n)$ в $H^{s+2m+1}_{\psi}(R^n)$. Первые слагаемые и, значит, их разность будут ограниченными операторами из $H^{s}_{\psi^{-1}}(R^n)$ в $H^{s+2m+1}_{\psi}(R^n)$ согласно оценке (15). ■

Лемма 8. *Если коэффициенты оператора $R(x, k, i\partial/\partial x)$ принадлежат $L_{\varepsilon,\psi}$, то при любых $k_1, k_2\in\mathscr{D}_n\setminus\{0\}$ оператор*

$$R\left(x, k_1, i\frac{\partial}{\partial x}\right)A^\mu_{k_1}-R\left(x, k_2, i\frac{\partial}{\partial x}\right)A^\mu_{k_2}: H^{s}_{\psi^{-1}}(R^n)\to H^{s}_{\psi}(R^n)$$

компактен.

Доказательство. Запишем интересующий нас оператор в виде

$$\left[R\left(x, k_1, i\frac{\partial}{\partial x}\right)-R\left(x, k_2, i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]A^\mu_{k_1}+$$

$$+R\left(x, k_2, i\frac{\partial}{\partial x}\right)[A^\mu_{k_1}-A^\mu_{k_2}].$$

Компактность каждой из половин полученного выражения легко проверяется с помощью лемм 6, 7. ■

Напомним (см. гл. VI), что через $H^{s,\rho}(\Omega)$, $s\geqslant 0$, обозначается пространство Солобева — Слободецкого с нормой

$$\|u\|_{H^{s,\rho}(\Omega)}=[\|u\|^2_{H^s(\Omega)}+\rho^{2s}\|u\|^2_{H^0(\Omega)}]^{1/2},\quad \rho>0,$$

и аналогично определяется пространство $H^{s,\rho}(\Gamma)$.

Лемма 9. *Пусть выполнены условия теоремы 5. Тогда при $k\in l_{\varphi_0}$ и $\rho=|k|$ достаточно больших ядро оператора $\mathfrak{A}_k$ три-*

виально, а для принадлежащих $H^{s+2m}(\Omega)$ решений u_k задачи (36) *справедлива оценка*

$$\|u_k\|_{H^{s+2m,\rho}(\Omega)} \leqslant C\left[\|f\|_{H^{s,\rho}(\Omega)} + \sum_{j=1}^{m} \|\varphi_j\|_{H^{s+2m-m_j-\frac{1}{2},\rho}(\Gamma)}\right], \tag{40}$$

где константа C не зависит от $\rho=|k|$.

Доказательство. Очевидно, при $k \in l_{\varphi_0}$ справедлива оценка

$$\frac{1}{|P(k,\sigma)|} < C(\rho^{2m} + |\sigma|^{2m})^{-1}, \quad \rho = |k|.$$

Из этой оценки и формулы (31) следует, что при $k \in l_{\varphi_0}$ и $s \geqslant 0$

$$\|P_k^{-1} f\|_{H^{s+2m,\rho}(R^n)} \leqslant C\|f\|_{H^{s,\rho}(R^n)}, \quad \rho = |k|. \tag{41}$$

Обозначим через $\hat{u}_k \in H^{s+2m}(R^n)$ продолжение решения $u_k \in H^{s+2m}(\Omega)$ задачи (36) на все пространство R^n без потери гладкости с помощью оператора l, свойства которого приведены в формулах (7), (8) гл. VIII. Тогда

$$P\left(x, k, i\frac{\partial}{\partial x}\right)\hat{u}_k = \hat{f}_k, \quad x \in R^n, \tag{42}$$

где коэффициенты оператора P считаются продолженными произвольным образом с сохранением бесконечной дифференцируемости в $R^n \setminus \Omega$, а $\hat{f}_k$ — некоторая функция, совпадающая с f при $x \in \Omega$ и обладающая оценкой

$$\|\hat{f}_k\|_{H^{s,\rho}(R^n)} \leqslant C[\|f\|_{H^{s,\rho}(\Omega)} + \|u\|_{H^{s+2m,\rho}(\Omega_{R_0})}],$$

причем константа C не зависит от $\rho=|k|$. Перенесем слагаемое $R(x, k, i\partial/\partial x)\hat{u}_k$ в правую часть уравнения (42) и воспользуемся затем оценкой (41). Получим

$$\|\hat{u}_k\|_{H^{s+2m,\rho}(R^n)} \leqslant C\left[\|f\|_{H^{s,\rho}(\Omega)} + \|u\|_{H^{s+2m,\rho}(\Omega_{R_0})} + \right.$$
$$\left. + \left\|R\left(x, k, i\frac{\partial}{\partial x}\right)\hat{u}_k\right\|_{H^{s,\rho}(R^n)}\right].$$

Поскольку коэффициенты оператора R вместе с производными стремятся к нулю при $|x| \to \infty$, то из последнего неравенства точно так же, как и при выводе априорной оценки из аналогичного неравенства в доказательстве теоремы 1 гл. VIII, следует, что существуют такие не зависящие от ρ константы C и d, что

$$\|u_k\|_{H^{s+2m,\rho}(\Omega)} \leqslant C\left[\|f\|_{H^{s,\rho}(\Omega)} + \sum_{j=1}^{m} \|\varphi_j\|_{H^{s+2m-m_j-\frac{1}{2},\rho}(\Gamma)} + \right.$$
$$\left. + \|u_k\|_{H^{s+2m,\rho}(\Omega_d)}\right]. \tag{43}$$

С помощью теоремы 6′ гл. VI последнее слагаемое в правой части оценки (43) можно заменить на $\|u_k\|_{H^{s,\rho}(\Omega)}$. Так как эта величина не превосходит $\rho^{-2m}\|u_k\|_{H^{s+2m,\rho}(\Omega)}$, то при достаточно больших ρ (для которых $C\rho^{-2m}<1/2$, где C — константа, получающаяся в (43) на предыдущем шагу) оценка (43) эквивалентна (40). Тривиальность ядра оператора $\mathfrak{A}_k$ при указанных значениях k следует из оценки (40). ■

Доказательство теорем 5, 6. Будем доказывать утверждения теоремы 6, относящиеся к оператору $C^1{}_k$, и теорему 5 для случая $k\in D^-{}_\gamma$. Вторые случаи ($k\in D^+{}_\gamma$ в теореме 5 и утверждения теоремы 6 об операторе $C^2{}_k$) исследуются аналогично.

Обозначим через N_k следующий оператор в пространстве $H^s_{\psi^{-1}}(R^n)$:

$$N_k f=\zeta(r-d)\,R\left(x,k,i\frac{\partial}{\partial x}\right)A_k^1(\zeta(r-d-1)f),\quad k\in\mathfrak{D}_n, \tag{44}$$

где $d>R_0$, функция ζ определена в лемме 1 гл. VIII, функция $\zeta(r-d-1)f$ продолжена нулем в область $R^n\setminus\Omega$, а коэффициенты оператора R принадлежат $L_{s,\psi}$. Так же будем обозначать аналогичный оператор в пространстве $H^s(R^n)$:

$$N_k f=\zeta(r-d)\,R\left(x,k,i\frac{\partial}{\partial x}\right)P_k^{-1}(\zeta(r-d-1)f),\quad k\in D_\gamma^-, \tag{45}$$

который определен, если коэффициенты оператора R принадлежат $L_{s,0}$. В силу теоремы 4 при $k\in D^-{}_\gamma$ на общей области определения ($H^s_{\psi^{-1}}$) эти операторы действуют одинаково (если операторы R в формулах (44), (45) одни и те же). Из контекста всегда будет ясно, какому пространству принадлежит функция f и, значит, о каком операторе N_k идет речь.

Зафиксируем произвольную точку $k=k_1\in l_{\varphi_0}$. Из оценки (41) и убывания на бесконечности коэффициентов оператора R и их производных следует существование такого $d>R_0$, что при выполненных условиях теоремы 5 и всех $k\in l_{\varphi_0}$

$$\|N_k f\|_{H^{s,\rho}(\Omega)}\leqslant\frac{1}{2}\|f\|_{H^{s,\rho}(\Omega)},\quad \rho=|k|, \tag{46}$$

а при выполненных условиях теоремы 6, кроме того,

$$\|N_{k_1}f\|_{H^s_{\psi^{-1}}(\Omega)}\leqslant\frac{1}{2}\|f\|_{H^s_{\psi^{-1}}(\Omega)} \tag{47}$$

(см. доказательство теоремы 1 гл. VIII). В дальнейшем константа d считается зафиксированной так, что выполнены обе эти оценки.

В области Ω_{d+4} рассмотрим задачу

$$\begin{cases} P\left(x, k, i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)v = f, \quad x \in \Omega_{d+4}; \\ B\left(x, k, i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)v|_{\Gamma} = \varphi; \; Dv|_{r=d+4} = 0, \end{cases} \tag{48}$$

где D — вектор из дифференциальных операторов $D_j(x, k, i\partial/\partial x)$, $1 < j < m$, таких, что $D_j(x, k, \sigma)$ — многочлен относительно (k, σ) порядка $d_j < s+2m-1$ и задача (48) является эллиптической задачей с параметром $k \in l_{\varphi_0}$. Из теоремы 6′ гл. VI следует, что при $k \in l_{\varphi_0}$, ρ' — достаточно большом и $|k| > \rho'$ существует оператор Q_k, переводящий векторы $(f, \varphi) \in H^s(\Omega_{d+4}, \Gamma)$ в решение $u \in H^{s+2m}(\Omega_{d+4})$ задачи (48), причем

$$\| Q_k(f, \varphi) \|_{H^{s+2m,\rho}(\Omega_{d+4})} \leqslant$$

$$\leqslant C\left[\|f\|_{H^{s,\rho}(\Omega_{d+4})} + \sum_{j=1}^{m} \|\varphi_j\|_{H^{s+2m-m_j-\frac{1}{2},\rho}(\Gamma)}\right]. \tag{49}$$

Пусть функции $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — те же, что и при доказательстве теоремы 1 гл. VIII и Φ_k — следующий оператор:

$$\Phi_k : H^{s}_{\psi^{-1}}(\Omega, \Gamma) \to H^{s+2m}_{\psi}(\Omega), \quad k \in \mathcal{D}_n,$$

$$\Phi_k(f, \varphi) = \beta_1 Q_{k_0}(\alpha_1 f, \varphi) + \beta_2 A^1_k(\alpha_2 f), \; k \in \mathcal{D}_n, \tag{50}$$

где $k_0 = \rho_0 \exp(i\varphi_0) \in l_{\varphi_0}$, а величина $\rho_0 > \rho'$ будет выбрана ниже. Поскольку точка $k = k_0$ фиксирована, а для оператора Q_{k_0} справедлива оценка (49) и $\beta_1 = 0$ при $r > d+3$, то оператор Φ_k является ограниченным оператором в указанных пространствах, конечномероморфно зависящим от $k \in \mathcal{D}_n$, и может иметь полюс только при $k = 0$, причем если n нечетно, $n < 2m$. Пусть

$$\Phi(f, \varphi) = \beta_1 Q_{k_0}(\alpha_1 f, \varphi) + \beta_2 P^{-1}_{k_0}(\alpha_2 f); \; \Phi : H^s(\Omega, \Gamma) \to H^{s+2m}(\Omega). \tag{51}$$

Этот оператор ограничен, и, согласно теореме 4,

$$\Phi(f, \varphi) = \Phi_{k_0}(f, \varphi) \text{ при } (f, \varphi) \in H^{s}_{\psi^{-1}}(\Omega, \Gamma).$$

Пусть $\mathfrak{A}^d_k$ — оператор, отвечающий задаче (48), т. е. оператор, переводящий функции u, определенные в Ω_{d+4}, в вектор $(Pu, Bu|_{\Gamma})$. Тогда

$$\mathfrak{A}^d_k Q_{k_0}(f, \varphi) = (f, \varphi) + M(f, \varphi), \tag{52}$$

где $M = \mathfrak{A}^d_k - \mathfrak{A}^d_{k_0}$. Так как старшие члены операторов $P(x, k, i\partial/\partial x)$ и $B_j(x, k, i\partial/\partial x)$ не зависят от k, то оператор M является ограниченным оператором из пространства $H^s(\Omega_{d+4}, \Gamma)$ в

$H^{s+1}(\Omega_{d+4}, \Gamma)$. Тогда, согласно теореме 2 гл. VI, он будет компактен как оператор из пространства $H^s(\Omega_{d+4}, \Gamma)$ в себя. Поскольку при доказательстве теоремы 1 гл. VIII используется не конечномерность оператора $M=(M_1, M_2)$, определенного формулой (16) гл. VIII, а только его компактность, то формула (52) является точным аналогом формулы (16) гл. VIII. Используя ее, можно показать точно так же, как это делалось для операторов $\mathfrak{A}$, Φ при доказательстве теоремы 1 гл. VIII, что в условиях теоремы 5

$$\mathfrak{A}_{k_0}\Phi = I + G + T : H^s(\Omega, \Gamma) \to H^s(\Omega, \Gamma), \tag{53}$$

и при выполненных условиях теоремы 6

$$\mathfrak{A}_k\Phi_k = I + G_k + T_k : H^s_{\psi^{-1}}(\Omega, \Gamma) \to H^s_{\psi^{-1}}(\Omega, \Gamma),\ k \in \mathcal{D}_n, \tag{54}$$

где I — единичные операторы, T и T_k — компактные операторы,

$$G(f, \varphi) = (N_{k_0} f, 0), \quad G_k(f, \varphi) = (N_k f, 0) \tag{55}$$

и операторы G_{k_0}, T_{k_0} совпадают с G, T соответственно на общей области определения (на $H^s_{\psi^{-1}}(\Omega, \Gamma)$). При этом операторы G_k, T_k конечно-мероморфно зависят от $k \in \mathcal{D}_n$ с единственным возможным полюсом в точке $k=0$ при нечетном $n<2m$.

Зафиксируем теперь константу $\rho_0=|k_0|$ в формулах (50), (51) так, чтобы оператор (53) был обратим. Для того чтобы показать существование такого k_0, введем в пространстве $H^s(\Omega, \Gamma)$ другую, эквивалентную имеющейся, норму:

$$\|(f, \varphi)\|_{H^{s,\rho_0}(\Omega,\Gamma)} = \left[\|f\|^2_{H^{s,\rho_0}(\Omega)} + \sum_{j=1}^{m} \|\varphi_j\|^2_{H^{s+2m-m_j-\frac{1}{2},\rho_0}(\Gamma)}\right]^{1/2} \tag{56}$$

и покажем, что при такой норме в пространстве $H^s(\Omega, \Gamma)$ и достаточно большом $\rho_0=|k_0|$ норма оператора $G+T$ не превосходит единицы. Из (46) и (55) следует, что при любом $k_0 \in l_{\varphi_0}$ норма оператора G в пространстве $H^{s,\rho_0}(\Omega, \Gamma)$ не превосходит 1/2. Далее,

$$P\left(x, k_0, i\frac{\partial}{\partial x}\right)[\beta_1 Q_{k_0}(\alpha_1 f, \varphi)] = \alpha_1 f + \{P, \beta_1\} Q_{k_0}(\alpha_1 f, \varphi), \tag{57}$$

где $\{P, \beta_1\}$ — коммутатор оператора $P(x, k_0, i\partial/\partial x)$ и оператора умножения на функцию β_1. Так как характеристический многочлен оператора $\{P, \beta_1\}$ является многочленом по переменным (k_0, σ) порядка не выше $2m-1$ и $\{P, \beta_1\}\equiv 0$ при $r>d+3$, то из (49) следует, что

$$\|\{P, \beta_1\} Q_{k_0}(\alpha_1 f, \varphi)\|_{H^{s+1,\rho_0}(\Omega)} \leqslant C\Psi,$$

где через Ψ обозначена норма (56). Аналогично, используя вместо (49) оценку (41), получаем, что норма вторых слагаемых в следующих равенствах

$$P\left(k_0, i\frac{\partial}{\partial x}\right)\beta_2 P^{-1}_{k_0}(\alpha_2 f) = \alpha_2 f + \left\{P\left(k_0, i\frac{\partial}{\partial x}\right), \beta_2\right\} P^{-1}_{k_0}(\alpha_2 f), \tag{58}$$

$$R\left(x, k_0, i\frac{\partial}{\partial x}\right)\beta_2 P_{k_0}^{-1}(\alpha_2 f) = N_{k_0} f + \{R, \beta_2\} P_{k_0}^{-1}(\alpha_2 f) \qquad (59)$$

не превосходит $C\Psi$. Сложив равенства (57)—(59), получим, что

$$P\left(x, k_0, i\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(f, \varphi) = f + N_{k_0} f + F(f, \varphi),$$

где

$$\|F(f, \varphi)\|_{H^{s,\rho_0}(\Omega)} \leqslant \frac{1}{\rho_0}\|F(f, \varphi)\|_{H^{s+1,\rho_0}(\Omega)} \leqslant C\rho_0^{-1}\Psi. \qquad (60)$$

Далее, поскольку $\beta_1 = 1$ в окрестности Γ и $\beta_2 = 0$ в окрестности Γ, то

$$B\left(x, k_0, i\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi(f, \varphi)|_\Gamma = B\left(x, k_0, i\frac{\partial}{\partial x}\right)Q_{k_0}(f, \varphi)|_\Gamma = \varphi.$$

Значит, $T(f, \varphi) = (F(f, \varphi), 0)$ и из (60) следует, что при $k_0 \in l_{\varphi_0}$ и $\rho_0 = |k_0|$ достаточно большом норма оператора T в пространстве $H^s(\Omega, \Gamma)$, снабженном нормой (56), будет меньше половины. Таким образом, при достаточно больших значениях $\rho_0 = |k_0|$ оператор (53) обратим. Выберем ρ_0 настолько большим, чтобы при $k = \rho_0 \exp(i\varphi_0)$, кроме того, оператор $\mathfrak{A}_{k_0}$ имел тривиальное ядро (см. лемму 9).

Будем искать принадлежащее $H^{s+2m}(\Omega)$ решение задачи (36) при $k = k_0$ в виде $u = \Phi(g, \psi)$ с неизвестными $(g, \psi) \in H^s(\Omega, \Gamma)$. Подставив функцию u в уравнение и граничные условия задачи, получим, согласно (53), для определения (g, ψ) уравнение

$$(I + G + T)(g, \psi) = (f, \varphi) \in H^s(\Omega, \Gamma). \qquad (61)$$

Константа k_0 была выбрана так, что это уравнение однозначно разрешимо. Значит, при $k = k_0$ задача (36) имеет решение $u \in H^{s+2m}(\Omega)$ для любых $(f, \varphi) \in H^s(\Omega, \Gamma)$. Так как при том же значении $k = k_0$ оператор $\mathfrak{A}_{k_0}$ имеет тривиальное ядро, то оператор (37) при $k = k_0$ имеет ограниченный обратный.

Далее, в силу теоремы 2 гл. VIII оператор (37) нётеров при каждом $k \in D^-_\gamma$. Так как при $k = k_0$ его индекс равен нулю, то в силу гомотопической устойчивости индекса [7] оператор $\mathfrak{A}_k$ фредгольмов (т. е. его индекс равен нулю) при всех значениях $k \in D^-_\gamma$. Теперь теорема 5 является следствием теоремы 8 гл. VI.

Докажем теорему 6. Будем искать решения $u_k \in H_\psi^{s+2m}(\Omega)$ задачи (36) при $k \in \mathscr{D}_n$ с правой частью $(f, \varphi) \in H^s_{\psi^{-1}}(\Omega, \Gamma)$ в виде $u_k = \Phi_k(g, \psi)$ с неизвестными $(g, \psi) \in H^s_{\psi^{-1}}(\Omega, \Gamma)$. Из (54) следует, что функция u_k будет решением задачи, если

$$S_k(g, \psi) \equiv (I + G_k + T_k)(g, \psi) = (f, \varphi). \qquad (62)$$

К оператору $S_k : H^s_{\psi^{-1}}(\Omega, \Gamma) \to H^s_{\psi^{-1}}(\Omega, \Gamma)$ применима теорема 8 гл. VI. Действительно, оператор S_k конечно-мероморфно зависит от параметра $k \in \mathscr{D}_n$. Покажем, что он образует конечно-мероморф-

ное фредгольмово семейство. При $k \neq 0$ его можно представить в виде

$$S_k = (I + G_{k_1}) + (G_k - G_{k_1} + T_k).$$

Из (55), (44) и леммы 8 следует, что второе слагаемое в правой части последней формулы является компактным оператором. Так как, согласно (55) и (47), $\|G_{k_1}\| \leqslant 1/2$, то оператор S_k, $k \neq 0$, как сумма обратимого и компактного, фредгольмов. Пусть S_k имеет в точке $k=0$ полюс, и $\tilde{N}_k$, $\tilde{S}_k$ — соответственно главная и правильная части ряда Лорана для S_k в окрестности точки $k=0$. Для того чтобы утверждать, что S_k образует конечно-мероморфное фредгольмово семейство при $k \in \mathscr{D}_n$, остается показать, что оператор $\tilde{S}_0$ фредгольмов. Но

$$\widetilde{S}_0 = \lim_{k \to 0} (S_k - \widetilde{N}_k) = I + G_{k_1} + \lim_{k \to 0} (G_k - G_{k_1} + T_k - \widetilde{N}_k).$$

Так как оператор $\tilde{N}_k$ конечномерен, то последняя формула представляет $\tilde{S}_0$ в виде суммы обратимого оператора и компактного, т. е. оператор $\tilde{S}_0$ — фредгольмов. Наконец, заметим, что если бы оператор S_k при $k=k_0$ имел нетривиальное ядро, то однородное уравнение (61) имело бы нетривиальное решение $(g, \psi) \in H^s_{\psi^{-1}}(\Omega, \Gamma) \subset H^s(\Omega, \Gamma)$. Так как это невозможно и оператор S_{k_0} фредгольмов, то S_{k_0} имеет ограниченный обратный. Таким образом, к оператору S_k применима теорема 8 гл. VI и из нее следует, что операторы

$$S_k^{-1} : H^s_{\psi^{-1}}(\Omega, \Gamma) \to H^s_{\psi^{-1}}(\Omega, \Gamma) \tag{63}$$

образуют конечно-мероморфное фредгольмово семейство.

Напомним, что из уравнения (62) следует, что функция $u_k = \Phi_k(g, \psi)$ является решением задачи (36), т. е. функция

$$u_k = \Phi_k S_k^{-1}(f, \varphi) \tag{64}$$

при всех $(f, \varphi) \in H^s_{\psi^{-1}}(\Omega, \Gamma)$ и $k \in \mathscr{D}_n \setminus \Lambda$ удовлетворяет уравнению и граничным условиям задачи (36). Здесь Λ — множество точек, являющихся полюсами оператора Φ_k или S_k^{-1}. Обозначим через $\tilde{\Lambda}$ множество полюсов оператора $\Phi_k S_k^{-1}$. Очевидно, $\tilde{\Lambda} \subset \Lambda$. По непрерывности (по параметру k) функция (64) будет решением задачи (36) при всех $k \in \mathscr{D}_n \setminus \tilde{\Lambda}$.

Покажем, что оператор $\Phi_k S_k^{-1}$ совпадает с C^1_k. Из ограниченности оператора (63) при $k \overline{\in} \Lambda$ и формулы (50) для оператора Φ_k следует, что $u_k \in \overline{W}_k^{\mu^1}(\Omega)$ при $k \in l_+ \setminus \Lambda$, где $l_+ = \{k : \arg k = 0\}$. Однако даже для этих значений k нельзя утверждать, что $C^1_k = \Phi_k S_k^{-1}$. Например, могло бы случиться так, что однородная задача (36) имеет при выбранном k нетривиальное решение, принадлежащее $\overline{W}_k^{\mu^1}(\Omega)$, и, значит, оператор C^1_k не существует. При этом оператор $\Phi_k S_k^{-1}$ существует и определяет какое-то из при-

надлежащих $\overline{W}_k^{\mu^s}(\Omega)$ решений задачи (36). Так как функция (64) при всех $k\in\mathcal{D}_n\diagdown\widetilde{\Lambda}$ является решением задачи (36), то равенство $C_k^1=\Phi_k S_k^{-1}$ будет доказано, если показать, что:

A. При всех $(f,\varphi)\in H_\psi^{s-1}(\Omega,\Gamma)$ и любом $k\in l_+\diagdown\widetilde{\Lambda}$ функция (64) принадлежит $\overline{W}_k^{\mu^s}(\Omega)$.

B. Оператор $\Phi_k S_k^{-1}$ имеет полюса в тех и только тех точках луча l_+, в которых однородная задача (36) имеет нетривиальные решения, принадлежащие $\overline{W}_k^{\mu^s}(\Omega)$.

Отметим, что соотношение $C^1{}_k=\Phi_k S_k^{-1}$, $k\in l_+$, дает автоматически конечно-мероморфное продолжение оператора $C^1{}_k$ на всю область $\mathcal{D}_n$. Поскольку функция (64) при $k\in\mathcal{D}_n\diagdown\Lambda$ является решением задачи (36), а утверждение 3 теоремы 6 будет следовать из *B*, то для доказательства теоремы 6 достаточно показать справедливость *A*, *B* и утверждений 2, 4, 5 теоремы 6.

Докажем справедливость *A*. Как уже отмечалось выше, это утверждение справедливо при $k\in l_+\diagdown\Lambda$. Остается доказать его при тех $k\in l_+$, которые принадлежат Λ, но не принадлежат $\widetilde{\Lambda}$. Пусть $\alpha(x)\in C_0^\infty(R^n)$, $\alpha(x)=0$ при $r<R_0$, $\alpha(x)=1$ при $r>R_0+1$. Поскольку функция (64) при $k\in\mathcal{D}_n\diagdown\widetilde{\Lambda}$ удовлетворяет уравнению (36), то

$$P\left(x,k,i\frac{\partial}{\partial x}\right)[\alpha(x)u_k]=\alpha f+\{P,\alpha\}u_k,\quad x\in\Omega,$$

где $\{P,\alpha\}$ — коммутатор оператора P и оператора умножения на функцию α. Значит, при $k\in\mathcal{D}_n\diagdown\widetilde{\Lambda}$

$$P\left(k,i\frac{\partial}{\partial x_j}\right)[\alpha u_k]=g_k,\quad x\in R^n,\tag{65}$$

где функция g_k при $x\in\Omega$ равна

$$g_k=\alpha f+\{P,\alpha\}u_k-R\left(x,k,i\frac{\partial}{\partial x}\right)[\alpha u_k]$$

и функции αu_k, g_k считаются продолженными нулем в область $R^n\diagdown\Omega$. Поскольку $\{P,\alpha\}=0$ при $|x|>R_0+1$ и $\alpha=0$ при $|x|<R_0$, то g_k как элемент $H_\psi^{s-1}(R^n)$ аналитически зависит от k при $k\in\mathcal{D}_n\diagdown\widetilde{\Lambda}$. Так как $u_k\in\overline{W}_k^{\mu^s}(\Omega)$ при $k\in l_+\diagdown\Lambda$, то $\alpha u_k\in\overline{W}_k^{\mu^s}(R^n)$ при этих значениях k, и из (65) получаем, что

$$\alpha u_k=A^1{}_k g_k,\quad k\in l_+\diagdown\Lambda.\tag{66}$$

Пусть $\varkappa\in l_+\diagdown\widetilde{\Lambda}$. Положим в (66) $k=\varkappa$, если $\varkappa\overline{\in}\Lambda$, или перейдем к пределу при $k\to\varkappa$, если $\varkappa\in\Lambda$. При любом $\varkappa\in l_+\diagdown\widetilde{\Lambda}$ получим, что

$$\alpha u_\varkappa=A_\varkappa^1 g_\varkappa,\ g_\varkappa\in H_\psi^{s-1}(R^n).$$

Значит, $\alpha u_\varkappa\in\overline{W}_\varkappa^{\mu^s}(R^n)$, что доказывает справедливость утверждения *A*.

Докажем утверждение B. Пусть оператор $\Phi_k S_k^{-1}$ имеет в точке $k=\varkappa\in l_+$ полюс порядка $j>0$, и V настолько малая окрестность этой точки, что $\Lambda\cap(V\setminus\varkappa)=\varnothing$. Тогда существует такая функция $(f, \varphi)\in H_\psi^{s,-1}(\Omega, \Gamma)$, что существует ненулевой предел

$$u=\lim_{k\to\varkappa}(k-\varkappa)^j u_k, \quad u_k=\Phi_k S_k^{-1}(f, \varphi)$$

в пространстве $H^s{}_\psi(\Omega, \Gamma)$. Поскольку функция u_k при $k\in V\setminus\varkappa$ удовлетворяет уравнению и граничным условиям задачи (36), то, умножив их на $(k-\varkappa)^j$ и перейдя затем к пределу при $k\to\varkappa$, получим, что функция u является решением однородной задачи (36) при $k=\varkappa$. Далее, при $k\in l_+\cap(V\setminus\varkappa)$ справедливо равенство (66). Умножив его на $(k-\varkappa)^j$ и перейдя затем к пределу при $k\to\varkappa$, получим, что $\alpha u=A^1{}_\varkappa g$,

$$g=\lim_{k\to\varkappa}(k-\varkappa)^j g_k\in H_\psi^{s,-1}(R^n), \text{ т. е. } u\in\overline{W}_\varkappa^{\mu^1}(\Omega).$$

Наоборот, пусть при $k=\varkappa\in l_+$ однородная задача (36) имеет нетривиальное решение $u\in\overline{W}_\varkappa^{\mu^1}(\Omega)$. Для доказательства утверждения B остается показать, что в этом случае оператор $\Phi_k S_k^{-1}$ имеет полюс в точке $k=\varkappa$.

Из ограниченности оператора (63), формулы (50) для оператора Φ_k и теоремы 4 следует, что при $k\in D^-{}_\gamma\setminus\Lambda$ функция $u_k=\Phi_k S_k^{-1}(f, \varphi)$ принадлежит $H^{s+2m}(\Omega)$, т. е. для любых $(f, \varphi)\in H_\psi^{s,-1}(\Omega, \Gamma)$

$$\Phi_k S_k^{-1}(f, \varphi)=\mathfrak{A}_k^{-1}(f, \varphi), \quad k\in D_\gamma^-\setminus\Lambda. \tag{67}$$

Пусть $\widehat{u}\in\overline{W}_\varkappa^{\mu^1}(R^n)$ — продолжение функции u на все пространство R^n, полученное с помощью оператора продолжения (8) гл. VIII. Пусть

$$P\left(\varkappa, i\frac{\partial}{\partial x}\right)\widehat{u}(x)=h(x), \quad x\in R^n.$$

Так как $h(x)=-R(x, \varkappa, i\partial/\partial x)u(x)$ при $x\in\Omega$, то $h\in H_\psi^{s,-1}(R^n)$. Через $\hat{v}_k$ обозначим функцию

$$\hat{v}_k(x)=A^1{}_k h(x) \tag{68}$$

и через v_k — ограничение функции $\hat{v}_k$ на область Ω. Так как $\hat{u}=A^1{}_\varkappa h$, а оператор $A^1{}_k$ аналитически зависит от k при $k\neq0$, то

$$\lim_{k\to\varkappa}\|\widehat{v}_k-\widehat{u}\|_{H_\psi^{s+2m}(R^n)}=0,$$

и, значит,

$$\lim_{k\to\varkappa}\|v_k-u\|_{H_\psi^{s+2m}(\Omega)}=0. \tag{69}$$

Оценим результат подстановки функции v_k в уравнение и граничные условия задачи (36). Имеем

$$P\left(x, k, i\frac{\partial}{\partial x}\right)v_k = P\left(k, i\frac{\partial}{\partial x}\right)v_k + R\left(x, k, i\frac{\partial}{\partial x}\right)v_k =$$
$$= h(x) + R\left(x, k, i\frac{\partial}{\partial x}\right)v_k = P\left(\varkappa, i\frac{\partial}{\partial x}\right)u + R\left(x, k, i\frac{\partial}{\partial x}\right)v_k =$$
$$= R\left(x, k, i\frac{\partial}{\partial x}\right)(v_k - u) + \left[R\left(x, k, i\frac{\partial}{\partial x}\right) - R\left(x, \varkappa, i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]u. \tag{70}$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем, что функция u — решение однородной задачи (36). По этой же причине

$$B\left(x, k, i\frac{\partial}{\partial x}\right)v_k|_\Gamma = B\left(x, k, i\frac{\partial}{\partial x}\right)(v_k - u)|_\Gamma +$$
$$+\left[B\left(x, k, i\frac{\partial}{\partial x}\right) - B\left(x, \varkappa, i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]u|_\Gamma. \tag{71}$$

Обозначим через (g, ψ) вектор из правых частей равенств (70), (71). Тогда из (69) следует, что

$$\|(g, \psi)\|_{H^s_\psi{}^{-1}(\Omega,\Gamma)} \to 0 \text{ при } k\to\varkappa. \tag{72}$$

Из теоремы 4 и (68) вытекает, что $v_k \in H^{s+2m}(\Omega)$ при $k \in D^-_\gamma$ и, значит, $v_k = \mathfrak{A}_k^{-1}(g, \psi)$, $k\in D^-_\gamma$. Теперь из (67) получаем, что $v_k = \Phi_k S_k^{-1}(g, \psi)$, $k \in D^-_\gamma$. Это вместе с равенствами (69), (72) доказывает существование полюса оператора $\Phi_k S_k^{-1}$ в точке $k=\varkappa$. Утверждение B доказано, и, значит, $C^1{}_k = \Phi_k S_k^{-1}$.

Докажем утверждение 2 теоремы 6. Из формулы (67) следует, что $C^1{}_k = \widehat{R}_k$ при $k\in D^-_\gamma \setminus \Lambda$. Поскольку оба этих оператора мероморфны в D^-_γ, то $C^1{}_k = \widehat{R}_k$ при всех $k \in D^-_\gamma$. Далее, оператор $\mathfrak{A}_k^{-1}$ конечно-мероморфен и имеет полюса в тех и только тех точках $k\in D^-_\gamma$, в которых однородная задача (36) имеет нетривиальные решения, принадлежащие $H^{s+2m}(\Omega)$. Так как пространство $H^s_\psi{}^{-1}(\Omega, \Gamma)$ (на котором определен оператор $\widehat{R}_k$) плотно в $H^s(\Omega, \Gamma)$ (где определен оператор $R_k = \mathfrak{A}_k^{-1}$), то в области D^-_γ оператор $\widehat{R}_k$ имеет полюса в тех же точках, что и оператор $\mathfrak{A}_k^{-1}$.

Утверждения 4, 6 теоремы 6 доказываются точно так же, как и A, B соответственно. Теорема 6 доказана полностью. ■

§ 3. Асимптотика решений внешних задач при малых частотах

Из теоремы 6 следует, что в случае нечетной размерности пространства оператор $\widehat{R}_k$ либо аналитичен в точке $k=0$, либо имеет там полюс. В случае, когда размерность пространства четна, эта теорема ничего не говорит о поведении оператора $\widehat{R}_k$ при $k\to0$

(кроме наличия ветвления). В этом параграфе будет получена асимптотика оператора $\widehat{R}_k$ при $k\to 0$ в случае четного n. Кроме того, будут приведены условия, обеспечивающие при любом n ограниченность $\|\widehat{R}_k\|$ в некоторой окрестности нуля (и, значит, обеспечивающие отсутствие полюса в нуле у оператора $\widehat{R}_k$ при нечетном n).

Обозначим через $\Omega_{\gamma,\varepsilon}$ следующую область на римановой поверхности функции $\ln k$:

$$\Omega_{\gamma,\varepsilon}=\{k:|\arg k|<\gamma,\ |k|<\varepsilon\}.$$

Нам понадобится

Лемма 10. *Пусть $S_k: H\to H$ — оператор в гильбертовом пространстве H, определенный при комплексных $k\neq 0$, $|k|<1$, фредгольмовый при этих значениях k и имеющий вид*

$$S_k=T_k\ln k+\sum_{j=1}^{N}A_jk^{-j}+G_k, \tag{73}$$

где операторы T_k, G_k являются аналитическими оператор-функциями в круге $|k|<1$, операторы $\left.\frac{d^s}{dk^s}T_k\right|_{k=0}$, $s\geqslant 0$, и A_j, $1\leqslant j\leqslant N$, — конечномерны, оператор G_0 — фредгольмов и оператор S_k, обратим хотя бы при одном значении $k=k_0\neq 0$, $|k_0|<1$.

Тогда при любом $\gamma<\infty$ и некотором $\varepsilon=\varepsilon(\gamma)$ оператор S_k^{-1} можно представить в виде

$$S_k^{-1}=N_k+f(k)\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{i}S_{ij}\ln^j k\right)k^i, \tag{74}$$

где N_k — аналитическая в круге $|k|<\varepsilon(\gamma)$ оператор-функция, операторы S_{ij} ограничены и конечномерны, ряд сходится в операторной норме равномерно при $k\in\Omega_{\gamma,\varepsilon}$, а функция f имеет вид

$$f=\frac{k^{-a}}{P(\ln k)}\sum_{s=0}^{\infty}\left\{P_{sq}(\ln k)\left[\frac{k}{P(\ln k)}\right]^s\right\}. \tag{75}$$

Здесь $a\geqslant 0$ — некоторое целое число, $q=a+1$, P и P_j — некоторые полиномы степени не выше a и j соответственно и ряд сходится абсолютно и равномерно при $k\in\Omega_{\gamma,\varepsilon}$.

Доказательство. Так как оператор G_0 — фредгольмов, то существует такой конечномерный оператор A_0, что G_0-A_0 обратим, и, значит, оператор $N_k=(G_k-A_0)^{-1}$ аналитически зависит от k при $|k|<\varepsilon_0$, если $\varepsilon_0>0$ достаточно мало. Выберем теперь $\varepsilon(\gamma)>0$ так, чтобы $\varepsilon(\gamma)<\varepsilon_0$ и $\|(T_k-T_0)\ln k\|<\|N_k\|/2$. Тогда в области $\Omega_{\gamma,\varepsilon}$ оператор

$$Q_k=(T_k-T_0)\ln k+G_k-A_0$$

будет обратим и

$$Q_k^{-1} = \{[I + (T_k - T_0)(G_k - A_0)^{-1}\ln k](G_k - A_0)\}^{-1} =$$

$$= N_k \sum_{s=0}^{\infty} [-(T_k - T_0) N_k \ln k]^s.$$

Здесь I — единичный оператор, и ряд (так же, как и все последующие ряды) сходится в операторной норме равномерно по $k \in \Omega_{\gamma,\varepsilon}$. Подставляя в последнюю формулу при $s>0$ вместо $T_k - T_0$ и N_k их разложения в ряд Тейлора, получим, что

$$Q_k^{-1} = N_k + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{i} Q_{ij} \ln^j k \right) k^i, \ k \in \Omega_{\gamma,\varepsilon}, \tag{76}$$

где операторы Q_{ij} — конечномерные. Теперь при $k \in \Omega_{\gamma,\varepsilon}$

$$S_k^{-1} = \left(Q_k + T_0 \ln k + \sum_{j=0}^{N} A_j k^{-j} \right)^{-1} = Q_k^{-1} L_k^{-1}, \tag{77}$$

где

$$L_k = \left(I + T_0 Q_k^{-1} \ln k + \sum_{j=0}^{N} A_j Q_k^{-1} k^{-j} \right). \tag{78}$$

Обозначим через H' пространство (конечномерное), натянутое на области значений операторов T_0, A_j, $0 \leqslant j \leqslant N$. Пусть P' — ортопроектор на H', P'' — ортопроектор на ортогональное дополнение к H'. Чтобы найти оператор L_k^{-1}, нужно решить уравнение

$$L_k x = y, \quad x, y \in H. \tag{79}$$

Из (78), (79) следует, что $P''x = P''y$, а для определения $P'x$ получаем уравнение в конечномерном пространстве H':

$$P' \tilde{L}_k P' x = k^\beta P' y - P' \tilde{L}_k P'' y, \ \tilde{L}_k = k^\beta L_k, \tag{80}$$

где $\beta = \max(1, N)$. Выберем в H' какой-нибудь базис, и пусть L — матрица оператора $P' \tilde{L}_k P'$ в этом базисе и f — вектор, определяющий правую часть уравнения (80) в выбранном базисе. Из (76) и (78) следует, что элементы матрицы L и элементы вектора f можно представить в виде абсолютно и равномерно сходящихся в $\Omega_{\gamma,\varepsilon}$ числовых рядов вида

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} \alpha_{ij} \ln^j k \right) k^i.$$

В частности,

$$\det L = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{i} d_{ij} \ln^j k \right) k^i = \sum_{i=0}^{\infty} k^i D_i (\ln k), \tag{81}$$

где $D_i(t)=\sum_{j=0}^{i} d_{ij}t^j$ — многочлены степени i. Если $D_i(t)\equiv 0$ при всех i, т. е. $\det L\equiv 0$, то при всех $k\in\Omega_{\gamma,\varepsilon}$ не существует обратный к S_k. Это противоречит теореме 8 гл. VI. Значит, существует такое $a<\infty$, что $D_a(t)\not\equiv 0$ и $D_i(t)\equiv 0$ при $i<a$. Тогда

$$\det L=k^a P(\ln k)\left[1+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{k^s D_{a+s}(\ln k)}{P(\ln k)}\right],$$

где $P(t)\equiv D_a(t)$. Поскольку в этой формуле сумма по s стремится к нулю при $|\arg k|<\gamma$, $|k|\to 0$, то при $k\in\Omega_{\gamma,\varepsilon}$ и достаточно малом $\varepsilon=\varepsilon(\gamma)>0$

$$f(k)\equiv(\det L)^{-1}=\frac{k^{-a}}{P(\ln k)}\sum_{r=0}^{\infty}\left[-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{k^s R_{sq}(\ln k)}{P^s(\ln k)}\right]^r,\tag{82}$$

где $R_{sq}=D_{a+s}P^{s-1}$ — многочлен порядка не выше sq. Так как все участвующие в этих формулах ряды сходятся абсолютно и равномерно при $k\in\Omega_{\gamma,\varepsilon}$, то, собрав вместе члены, стоящие при одинаковых степенях $kP^{-1}(\ln k)$, получим для функции f формулу (75).

Решая систему (80) по правилу Крамера и учитывая (78), находим

$$P'x=f(k)F_1y,\quad F_1=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{i}F_{ij}\ln^j k\right)k^i,$$

где операторы F_{ij} конечномерны. А так как $P''x=P''y=y-P'y$ и $x=L_k^{-1}y$, то $L_k^{-1}=I-P'+f(k)F_1$. Подставив эту формулу в (76) в (77) и обозначив через F_2 ряд $Q_k^{-1}-N_k$, который дается формулой (76), получим

$$\begin{aligned}S_k^{-1}&=N_k-N_kP'+f(k)N_kF_1+F_2(I-P'+f(k)F_1)=\\&=N_k+f(k)\left[N_kF_1+F_2F_1+(\det L)(-N_kP'+F_2-F_2P')\right].\end{aligned}\tag{83}$$

Оператор-функцию N_k в квадратной скобке формулы (83) разложим в ряд Тейлора в точке $k=0$. Затем ряды для N_k, F_1, F_2 и ряд (81) для $\det L$, стоящие сомножителями внутри квадратной скобки в (83), перемножим почленно, пользуясь тем, что все эти ряды сходятся. Тогда формула (83) превратится в (74). ■

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы* 6 *и n четно. Тогда при любом $\gamma<\infty$ и некотором $\varepsilon=\varepsilon(\gamma)>0$ оператор $\widehat{R}_k$ не имеет полюсов в $\Omega_{\gamma,\varepsilon}$ и представим в виде*

$$\widehat{R}_k=L_k+k^{-\beta}f(k)\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{i}R_{ij}\ln^j k\right)k^i,\tag{84}$$

где

$$L_k, R_{lj}: H^s_{\psi-1}(\Omega, \Gamma) \to H^{s+2m}_\psi(\Omega)$$

— ограниченные операторы, оператор L_k аналитически зависит от k в круге $|k|<\varepsilon(\gamma)$, операторы R_{lj} конечномерны, функция f имеет вид (75), $\beta=2m-n$ *при* $n<2m$, $\beta=1$ *при* $n=2m$, $\beta=0$ *при* $n>2m$ *и ряд* (84) *сходится в операторной норме равномерно при* $k\in\Omega_{\gamma,\varepsilon}$.

Доказательство. При доказательстве теоремы 6 была получена следующая формула: $\widehat{R}_k=\Phi_k S^{-1}{}_k$, где оператор Φ_k дается формулой (50), а S_k — формулами (50), (54), (62). Из этих формул и теоремы 2 следует, что к оператору S_k применима лемма 10. Действительно, все условия этой леммы проверяются тривиально, кроме условия фредгольмовости оператора G_0 и обратимости S_{k_0} при некотором k_0 из области $0<|k|<1$. Но при доказательстве теоремы 6 было показано, что $S^{-1}{}_k$ конечно-мероморфная функция в $\mathcal{D}_n$ и, значит, оператор S_k обратим при почти всех $k\in\mathcal{D}_n$. Фредгольмовость оператора G_0 доказывается совершенно так же, как в случае нечетного n при доказательстве теоремы 6 была получена фредгольмовость оператора S_0 (надо только к оператору $\widetilde{N}_k$ добавить слагаемое $T_0 \ln k$, где T_k определено в (73)). Теорема 7 является очевидным следствием формулы (74), формулы (50) и теоремы 2. ■

Достаточные условия ограниченности оператора $\widehat{R}_k$ в окрестности $k=0$ приведем без доказательства (их можно найти в [34]). При этом мы ограничимся только наиболее интересным для приложений случаем $n>2m$, содержащим системы уравнений первого и второго порядка.

При $n>2m$ обозначим через H пространство функций, обладающих при $|x|\to\infty$ оценками

$$|D^p u| \leqslant C|x|^{2m-n-|p|}, \quad |p| \leqslant 2m.$$

В случае $n=2m$ через H обозначим пространство функций, для которых существует такая константа $d=d(u)$ (или не зависящий от x вектор — при рассмотрении краевых задач для систем уравнений), что при $|x|\to\infty$

$$|D^p[u(x)-d]| \leqslant C|x|^{-1-|p|}, \quad |p| \leqslant 2m.$$

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теоремы* 6 *и* $n>2m$. *Если однородная задача* (36) *при* $k=0$ *имеет в пространстве* H *только тривиальное решение, то оператор* $\widehat{R}_k$ *равномерно ограничен в* $\Omega_{\gamma,\varepsilon}$ *при любом* $\gamma>0$ *и некотором* $\varepsilon=\varepsilon(\gamma)$. *Если оператор* $\widehat{R}_k$ *равномерно ограничен в некоторой области* $\Omega_{\gamma,\varepsilon}$, *то задача* (36) *при* $k=0$ *имеет в пространстве* H *решение при любых* $(f, \varphi)\in H^s_\psi{}^{-1}(\Omega, \Gamma)$; *при этом соответствующая однородная формально сопряженная задача (если она существует) имеет в* H *только тривиальное решение.*

Заметим, что существование полюса у оператора $\hat{R}_k$ в области D^{+}_{τ} или D^{-}_{τ} (в зависимости от того, о каком из двух операторов $\hat{R}_k$ идет речь), а также на вещественной оси при $k \neq 0$ эквивалентно существованию у однородной задачи (36) нетривиального решения с соответствующими условиями на бесконечности (теорема 6). Аналогичный характер имеет сформулированное в теореме 8 условие ограниченности оператора $\hat{R}_k$ в нуле.

Часто в ситуации, когда задача обладает некоторой положительностью, можно очень просто проверить выполнение предположений теоремы 8. Например, пусть $n > 2m$ и для всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в $\bar{\Omega}$, удовлетворяющих однородным граничным условиям задачи (36) с $k=0$, справедлива оценка:

$$\mathrm{Re}\int_{\Omega} \bar{u}\, P\left(x, 0, i\frac{\partial}{\partial x}\right) u dx \geqslant C \sum_{|p|=m} \| D^p u\|_{L_2(\Omega)}, \; C > 0.$$

(При рассмотрении краевых задач для систем уравнений в этом месте нужно дополнительно предположить, что порядок уравнений, образующих систему, четен.) Тогда однородная задача (36) при $k=0$ имеет в пространстве H только тривиальное решение (см. [34]), т. е. условие теоремы 8 выполнено. Аналогичное утверждение имеется [34] и при $n=2m$.

Литературные указания, дополнения. Как и результаты предыдущих двух глав, все результаты этой главы автоматически переносятся на случай систем уравнений, для которых определитель соответствующей матрицы из дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами (к которой стабилизируется матрица системы при $r \to \infty$) удовлетворяет условиям 1, 2 и 4 (а также в несколько более общем случае, о котором шла речь в § 2 гл. VII). Перенести результаты первого параграфа на случай систем можно двумя способами: либо непосредственно доказывать их для случая систем (изменения будут минимальными), либо воспользоваться приемом, описанным в § 2 гл. VII, и получить утверждения для систем в качестве следствия из соответствующих утверждений для определителя системы. Рассуждения, использовавшиеся в § 2, 3 этой главы, совсем не зависят от того, рассматриваются ли краевые задачи для уравнений или систем уравнений. Отметим еще, что при переходе к случаю систем уравнений надо в формулировках доказанных результатов заменить $2m$ на порядок l уравнений, входящих в систему, и это число не обязательно четное.

Как уже отмечалось в самом начале главы, возможность аналитического по параметру k продолжения резольвенты $\hat{R}_k$ стационарных задач с вещественной оси в комплексную плоскость будет использована в следующей главе для получения асимптотики решений нестационарных задач при $t \to \infty$. При этом потребуются достаточно хорошие оценки оператора $\hat{R}_k$ как при

$|\mathrm{Re}\, k| \to \infty$, так и при $k \to 0$. В некоторых вопросах можно обойтись оценками для $\widehat{R}_k$ при вещественных частотах k, но для более подробного изучения поведения решений нестационарных задач при $t \to \infty$ нужно знать поведение $\widehat{R}_k$, когда $|\mathrm{Re}\, k| \to \infty$, $|\mathrm{Im}\, k| < C$, $C > 0$. Такие оценки для рассмотренных выше операторов будут получены в следующей главе.

Результаты этой главы опубликованы автором в работах [28, 29, 31, 34]. Впервые в многомерных задачах аналитическое продолжение ядра резольвенты оператора через непрерывный спектр было использовано О. А. Ладыженской [66] для обоснования принципа предельной амплитуды для уравнения $v_{tt} - \Delta v - q(x) v = f(x) \exp(-i\omega t)$, $q \in C_0^\infty$. Ядро резольвенты оператора Шредингера для системы трех частиц исследовано Л. Д. Фаддеевым [108], [109]. В большинстве работ по принципу предельного поглощения, указанных в предыдущей главе, исследуется гладкость по k ядра оператора $\widehat{R}_k$ при вещественных значениях k. Некоторые задачи рассмотрены в работах [119, 195, 186, 53, 45]. В работах [9, 10, 87, 88] изучено поведение резольвенты при всех комплексных частотах для оператора Лапласа во внешности ограниченной двумерной области, в [13] — во внешности трехмерной области. Оценки в комплексной плоскости резольвенты оператора и расположение ее полюсов исследовались также в работах [99, 6, 183, 140, 166, 176, 89]. Кроме того, коротковолновая асимптотика ($k \to \infty$) резольвенты операторов при вещественных k (в основном для операторов второго порядка) изучалась в работах многих авторов, например [188, 129, 8, 11, 12, 19—22, 73, 95, 80, 37, 38, 18, 147, 167, 64, 78] (см. также литературные указания к гл. IV). Поведение резольвенты около точки $k = 0$ было исследовано в работах [148, 87, 88, 10] в случае внешних задач для оператора $\Delta + k^2$. Более общие операторы рассматривались в [125, 29, 34].

Глава X

КОРОТКОВОЛНОВАЯ АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ И АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРИ $t\to\infty$

§ 1. Введение

Пусть $L=L(x,\ i\partial/\partial t,\ i\partial/\partial x)$ — строго гиперболическая матрица размера $l\times l$ из дифференциальных операторов порядка m, причем при достаточно больших $|x|$ матрица L от x не зависит и однородна, т. е.

$$L=L_0\left(i\frac{\partial}{\partial t},\ i\frac{\partial}{\partial x}\right)+Q\left(x,\ i\frac{\partial}{\partial t},\ i\frac{\partial}{\partial x}\right),\quad x\in R^n, \tag{1}$$

где элементы матрицы L_0 — однородные операторы порядка m с постоянными коэффициентами, а элементы матрицы Q — операторы порядка не выше m с достаточно гладкими (для простоты — с бесконечно гладкими) коэффициентами, обращающимися в нуль при $|x|>a$. Через L_k обозначим стационарный оператор, получающийся из (1) заменой $i\partial/\partial t$ на k.

Всюду ниже предполагается, что коэффициент $D(x)$ при $\partial^m/\partial t^m$ у оператора L является единичной матрицей. Это не ограничивает общности, так как из гиперболичности L следует, что $\det D(x)\neq 0$, и рассматриваемую систему можно всегда умножить на $D^{-1}(x)$.

В этой главе изучаются задача Коши и внешняя смешанная задача для оператора (1) и соответствующие стационарные задачи для уравнения $L_k u=f$ во всем пространстве и во внешности ограниченной области. Нас интересует связь между следующими тремя вопросами:

1⁰. Асимптотика по гладкости матрицы Грина нестационарной задачи.

2⁰. Асимптотика решений нестационарной задачи при $t\to\infty$.

3⁰. Коротковолновая асимптотика (асимптотика при $|\mathrm{Re}\,k|\to\infty$) резольвенты стационарной задачи.

Охарактеризуем грубо связь между этими тремя вопросами. Конечно, преобразование Фурье по t матрицы Грина E нестационарной задачи дает ядро резольвенты стационарной задачи. Однако точные решения уравнений практически никогда не известны. На первый взгляд кажется, что, зная приближение E_N к E с точностью до достаточно гладкой матрицы $f_N=E-E_N$, можно получить коротковолновую асимптотику ядра резольвенты стационарной задачи в виде преобразования Фурье $F_{t\to k}E_N$. Однако, для

того чтобы преобразования Фурье $F_{t\to k} f_N$ достаточно быстро убывало при $k\to\infty$, одной гладкости матрицы f_N недостаточно. Например, функция $f(t)=\exp(it^2)$ аналитична, а ее преобразование Фурье $\tilde{f}(k)=\sqrt{\pi}\exp[-i(k^2-\pi)/4]$ не убывает на бесконечности. Если бы нам было известно поведение E при $t\to\infty$, то можно было бы надеяться подобрать E_N так, чтобы разность $f_N=E-E_N$ имела достаточно хорошую оценку при $t\to\infty$. Так как матрицы E и E_N равны нулю при $t<0$, то, например, суммируемость по t разности $E-E_N$ и ее производных по t обеспечивает получение коротковолновой асимптотики резольвенты стационарной задачи в виде $F_{t\to k}E_N$ для всех k из верхней полуплоскости. Если бы $E-E_N$ и ее производные по t убывали при $t\to\infty$ экспоненциально, то $F_{t\to k}E_N$ давала бы асимптотику ядра резольвенты при $|\mathrm{Re}\,k|\to\infty$ и $\mathrm{Im}\,k$ любого знака. Наоборот, зная коротковолновую асимптотику резольвенты при комплексных k, можно получить не только разрывы матрицы Грина смешанной задачи, но и ее асимптотическое разложение при $t\to\infty$. Таким образом, схематично связь между объектами 1°—3° выглядит так: $1°+2°\Leftrightarrow 3°$.

Остановимся чуть подробнее на уравнениях во всем пространстве. Асимптотика по гладкости матрицы Грина задачи Коши хорошо известна, а ответы на вопросы 2° и 3° до недавнего времени были известны только в некоторых частных случаях. В связи с тем что асимптотика при $t\to\infty$ решений нестационарной задачи была неизвестна, коротковолновую асимптотику решений стационарной задачи приходилось искать хотя и близкими методами, но независимо от асимптотики по гладкости матрицы Грина задачи Коши. При этом получить ответ на третий вопрос оказывается гораздо сложнее, чем на первый. Это связано со следующими тремя дополнительными трудностями. 1) Уравнение $L_k u=f$ имеет бесконечное множество решений, отличающихся поведением при $|x|\to\infty$. Поэтому при построении асимптотики при $|\mathrm{Re}\,k|\to\infty$ фиксированного решения приходится одновременно следить за поведением асимптотических приближений при $|x|\to\infty$. Таким образом, приходится строить асимптотическое приближение к решению сразу по двум параметрам: $|\mathrm{Re}\,k|\to\infty$ и $|x|\to\infty$. 2) До недавнего времени отсутствовали какие-либо оценки оператора L^{-1}_k при $|\mathrm{Re}\,k|\to\infty$. Поэтому не имело смысла строить приближение $\hat{u}$, удовлетворяющее уравнению $L_k\hat{u}=\hat{f}$, $f-\hat{f}=O(|\mathrm{Re}\,k|^{-N})$, так как нельзя было получить близость $\hat{u}$ к точному решению уравнения $L_k u=f$. 3) Ядро резольвенты стационарной задачи имеет в одной точке особенность, и характер асимптотики ядра резольвенты в окрестности этой точки и вне ее — различный (в некоторых подходах к решению задачи эта последняя трудность несущественна).

В этой главе будут рассмотрены задача Коши и общие внешние смешанные задачи для оператора (1) и соответствующие стационарные задачи. Основное условие на класс рассматриваемых задач заключается в требовании ухода на бесконечность в R^n

при $t\to\infty$ разрывов матрицы Грина нестационарной задачи (подробнее об этом будет сказано ниже). В случае задачи Коши асимптотическое приближение по гладкости к матрице Грина гиперболических систем построено и исследовано. В частности, показано, что разрывы матрицы Грина распространяются вдоль бихарактеристик соответствующей гамильтоновой системы. При малых t это показано в § 2 гл. IV (см. задачу в этом параграфе и указание к ней). При любых t это делается методами, изложенными в гл. V; см. [74]. Для многих смешанных задач также доказано, что условие на разрывы матрицы Грина эквивалентно уходу на бесконечность бихарактеристик, отвечающих рассматриваемой задаче (см. литературные указания к гл. IV).

В § 2 этой главы будет показано, что из одного только факта ухода на бесконечность при $t\to\infty$ разрывов матрицы Грина нестационарной задачи (не нужно даже знать, где и какие они) вытекают точные оценки при $|\operatorname{Re} k|\to\infty$ ($\operatorname{Im} k$ — любое) резольвенты стационарной задачи. Кроме того, будет показано, что при том же условии преобразование Фурье разрывов матрицы Грина дает коротковолновую асимптотику ядра резольвенты стационарной задачи. С помощью этих результатов в § 3 будет получена асимптотика при $t\to\infty$ решений нестационарной задачи. Грубо полученные ниже результаты можно описать так: $1^0\Rightarrow3^0\Rightarrow2^0$. Таким образом, результаты этой главы позволяют получить коротковолновую асимптотику решений стационарных задач (не только резольвенты; см., например, гл. XI) в тех случаях, когда известны разрывы соответствующей нестационарной задачи (например, для уравнений во всем пространстве).

Отметим, что асимптотика при $t\to\infty$ решений нестационарных задач важна не только для обоснования возможности делать в задаче преобразование Фурье по t, но имеет и самостоятельный интерес. Мы будем изучать нестационарные задачи во внешности ограниченной области для оператора (1) с нулем в правой части уравнений и с начальными данными, имеющими компактный носитель. Нас будет интересовать поведение решений этих задач при $t\to\infty$ и $|x|<b<\infty$, т. е. мы будем изучать ту часть энергии решения, которая остается в ограниченной части пространства при как угодно больших t при условии, что начальное возмущение сосредоточено в ограниченной части пространства. Последнее условие очень существенно, так как в противном случае в область $|x|<b$ будет постоянно приходить энергия из все более и более далеких точек пространства. Характер асимптотики при $t\to\infty$ и $|x|<b$ решений рассматриваемых задач существенно зависит от того, четна или нечетна размерность пространства. Так, в нечетномерном пространстве полученное ниже асимптотическое разложение решений внешних нестационарных задач имеет тот же вид, что и разложение в ряд Фурье решений смешанных задач в ограниченной области. Но в отличие от последнего случая в рассматриваемых задачах соответствующие ряды — только асимптотиче-

окие, и разложение идет не по осциллирующим, а по экспоненциально убывающим при $t\to\infty$ слагаемым, причем частотами являются не только собственные значения (в рассматриваемых случаях их конечное число) соответствующей стационарной задачи, но и полюса аналитического продолжения резольвенты стационарной задачи через непрерывный спектр. Те же методы позволят выяснить применимость к общим задачам принципа предельной амплитуды с равномерной по множеству правых частей задачи оценкой остаточного члена.

Описание класса рассматриваемых задач. Пусть Ω — неограниченная область в R^n с бесконечно гладкой конечной границей Γ и $a<\infty$ — фиксированная константа такая, что Γ лежит внутри шара $|x|<a$ и $Q\equiv 0$ вне этого шара (см. формулу (1)). Будет рассматриваться (внешняя) смешанная задача

$$\begin{cases} L\left(x,\ i\dfrac{\partial}{\partial t},\ i\dfrac{\partial}{\partial x}\right) v(t, x) = 0,\ x\in\Omega,\ t>0; \\ B\left(x,\ i\dfrac{\partial}{\partial x}\right) v(t, x)|_{\Gamma} = 0,\ t>0; \\ \dfrac{\partial^j v}{\partial t^j}\Big|_{t=0} = \begin{cases} 0, & j<m-1 \\ \varphi, & j=m-1, \end{cases}\quad x\in\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

где L — гиперболическая матрица размера $l\times l$ из операторов порядка m, v и φ — векторы из l компонент, B — матрица размера $(ml/2)\times l$ из дифференциальных операторов с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами порядка не выше $m-1$ (из сформулированного ниже условия A следует, что ml четно). Будет рассматриваться также аналогичная задача с ненулевой правой частью. Как частный случай в (2) содержится задача Коши для системы L ($\Omega=R^n$). В дальнейшем мы будем называть v, φ и другие вектор-функции просто функциями.

В течение этой главы предполагаются выполненными следующие четыре условия, которые мы сейчас обсудим. Обозначим через $H=H(x, \lambda, p)$ гамильтониан, отвечающий задаче (2): $H=H(x, \lambda, p)=\det\sigma(L)$, где (λ, p) — переменные, двойственные к (t, x), а $\sigma(L)$ — старшая однородная часть матрицы L.

Условие А. Для любой точки $x_0\in\overline{\Omega}$

$$H(x_0, 0, p)\neq 0 \quad \text{при} \quad p\neq 0. \tag{3}$$

Это условие означает, что плоские волны $u=u(vt+\langle p, x\rangle)$, удовлетворяющие уравнению $\sigma(L)(x_0, i\partial/\partial t, i\partial/\partial x)\,u=0$, имеют ненулевую скорость распространения. Иногда это условие называется условием отсутствия нулевой собственной частоты у матрицы $\sigma(L)$. Очевидно, это условие эквивалентно условию эллиптичности оператора L_k (последнее не зависит от значения k).

Стационарная задача, соответствующая задаче (2), имеет вид

$$\begin{cases} L_k u \equiv L\left(x, k, i\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = \varphi(x), \ x \in \Omega; \\ B\left(x, i\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x)|_\Gamma = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Условие B. Хотя бы для одного луча в верхней полуплоскости:

$$l_{\varphi_0} = \{k : k = \rho \exp(i\varphi_0), \rho > 0\}, \ 0 < \varphi_0 < \pi,$$

задача (4) является эллиптической задачей с параметром $k \in l_{\varphi_0}$.

Смысл этого условия обсуждался в гл. VI. Заметим, что из гиперболичности L и условия A следует, что матрица L_k является эллиптической матрицей с параметром $k \in l_{\varphi_0}$ для любого луча в верхней полуплоскости. Поэтому в случае задачи Коши условие B не накладывает никаких дополнительных ограничений на рассматриваемые уравнения, а для смешанных задач оно является условием на вид граничных операторов и часто является необходимым для корректности задачи (2) (см. [59, 41].)

Описание пространств. В этой главе через H^s, $s \in R^1$ (без указания области) будет обозначаться пространство Соболева (векторное) функций в Ω, через $H^s{}_a \subset H^s$ — подпространство, состоящее из функций, равных нулю при $|x| > a$, через $H^s{}_{(d)}$ — пространство Соболева функций в области $\Omega_d = \{x : x \in \Omega, \ |x| < d\}$. Через $\|\cdot\|_s$, $\|\cdot\|_{s,a}$, $\|\cdot\|_{s,(d)}$ будем обозначать норму в этих пространствах. Пространство Соболева (векторное) $H^s(R^1{}_+ \times \Omega)$ в полуцилиндре $t > 0$, $x \in \Omega$, чтобы не путать его с $H^s = H^s(\Omega)$, обозначим через B^s, норму в нем — через $|||\cdot|||_s$. Пусть $B^{s,\gamma}$ — пространство B^s с весом $\exp(-\gamma t)$ и $|||\cdot|||_{s,\gamma}$ — норма в нем, т. е. $|||u|||_{s,\gamma} = |||u \exp(-\gamma t)|||_s$. Через $B^s{}_{(d)}$ обозначается пространство B^s, в котором область Ω заменена на Ω_d, через $B^s{}_{(d),\tau}$ — подпространство в нем, состоящее из функций, равных нулю при $t > \tau$. Ниже неоднократно функции из H^s и B^s будут рассматриваться как элементы пространств $H^s{}_{(d)}$ и $B^s{}_{(d)}$ соответственно. В этих случаях подразумевается, что к функции применен оператор ограничения на область Ω_d или $R^1{}_+ \times \Omega_d$. Чтобы не загромождать формул, писать этот оператор ограничения не будем. Мы также не будем писать оператор ограничения, расоматривая в Ω функции, определенные на всем R^n.

Условие C. Для задачи (2) справедлива стандартная для смешанных задач теорема существования и единственности и априорная оценка, т. е. существует такое $\gamma < \infty$, что при любом $\nu \geqslant \gamma$ задача (2) имеет в пространстве $B^{m,\nu}$ и притом единственное решение u для любой $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и

$$|||u|||_{m-1,\gamma} \leqslant C\|\varphi\|_0. \tag{5}$$

Условия A—C выполнены, например, для всех трех основных краевых задач для волнового уравнения. Условие C выполнено

для положительных симметрических систем первого порядка, для любых консервативных или диссипативных задач. Будет рассматриваться также ослабленный вариант условия C (*условие C'*), в котором вместо оценки (5) предполагается, что для любой функции $\mu=\mu(t)\in C_0^\infty(R^1_+)$ с носителем в интервале (0, 1)

$$|||u*\mu|||_{m-1,\gamma}\leqslant C\ |||\mu\varphi|||_0.$$

Здесь и ниже в этой главе знак свертки означает свертку только по переменной t. Очевидно, $u*\mu$ будет решением задачи (2) с нулевыми начальными данными и правой частью в уравнении, равной $\mu(t)\varphi(x)$. Условия A, B, C' выполнены для общих коэрцитивных смешанных задач для произвольных гиперболических систем, для которых выполнено условие A [59, 100, 41].

Обозначим через P оператор, переводящий функции $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)\cap H_a^0$ в принадлежащие $B^{m,\gamma}$ решения задачи (2). Нас будут интересовать решения задачи (2) только в том случае, если носитель начальных данных компактен. Поэтому соответствующее условие заранее включено в определение оператора P. Из условия C следует, что оператор P продолжается до ограниченного оператора из пространства H^0_a в $B^{m-1,\gamma}$, а из условия C' вытекает ограниченность в тех же пространствах оператора $P_\mu: P_\mu\varphi=(P\varphi)*\mu$.

Условие D. Разрывы матрицы Грина нестационарной задачи уходят на бесконечность при $t\to\infty$, т. е. для любого $d>0$ существует такое $\tau=\tau(d)$, что обобщенное ядро $E(t, x, x_0)$ оператора P является бесконечно дифференцируемой функцией при $|x_0|<a$, $|x|<d$, $t>\tau(d)$.

Задаче (2) отвечает следующая система Гамильтона

$$t_s'=\frac{\partial H}{\partial\lambda},\ x_s'=\frac{\partial H}{\partial p},\ \lambda_s'=0,\ p_s'=-\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{6}$$

Как уже отмечалось выше, для задачи Коши условие D эквивалентно следующему условию: для любого d существует такое τ, что траектории системы (6), выпущенные из точек

$t(0)=0$, $x(0)=x_0$, $\lambda(0)=\lambda_0$, $p(0)=p_0$; $|x_0|\leqslant a$, $H(x_0, \lambda_0, p_0)=0$, лежат при $t>\tau$ в области $|x|>d$. В аналогичном виде можно сформулировать условие D для многих смешанных задач (см. литературу к гл. IV).

Мы закончим это введение формулировкой основного результата следующего параграфа. Напомним, что $L_0=L$ при $|x|>a$ (см. (1)).

Лемма 1. *Если $L_0(i\partial/\partial t, i\partial/\partial x)$ — гиперболическая матрица, для которой выполнено условие A, то оператор $H(1, i\partial/\partial x)=\det L_0(1, i\partial/\partial x)$ удовлетворяет сформулированным в § 2 гл. VII условиям* 1, 2 *и* 4; *при этом $\varkappa=ml/2$, где ml — порядок оператора H.*

Доказательство. Из гиперболичности матрицы L_0 следует, что поверхность K в пространстве $R_{\lambda,\sigma}^{n+1}$, задаваемая уравне-

нием $H(\lambda, \sigma)=0$, представляет собой гладкий конус с вершиной в начале координат, состоящий из ml «пол». Так как в силу условия A конус K не имеет с гиперплоскостью $\lambda=0$ общих точек помимо начала координат, то множество $S=\{\sigma:\sigma\in R^n,\ H(1, \sigma)=0\}$ представляет собой сечение конуса K плоскостью $\lambda=1$ и состоит из $ml/2$ непересекающихся связных поверхностей. Далее, в силу однородности многочлена $H(\lambda, \sigma)$ в точках конуса K справедливо соотношение $\lambda H_\lambda' + <\sigma, H_\sigma'> = 0$. А так как $H_\lambda' \neq 0$ при $(\lambda, \sigma)\in K$ (в силу гиперболичности L_0), то $<\sigma, H_\sigma'> \neq 0$ при $\sigma\in S$. Отсюда следует утверждение леммы. ■

Из леммы 1 следует, что к задаче (5) применимы все результаты предыдущей главы. Пусть

$$R_k: H^0(\Omega)\to H^m(\Omega),\ \operatorname{Im} k>0, \tag{7}$$

— оператор, переводящий функции $\varphi\in H^0(\Omega)$ в принадлежащие $H^m(\Omega)$ решения задачи (4). Этот оператор будет совпадать с оператором $R_k=\mathfrak{A}_k^{-1}$, определенным в теореме 5 предыдущей главы, если последний рассмотреть не на всем $H^0(\Omega, \Gamma)$, а на подпространстве этого пространства, состоящем из функций вида $(f, 0)$, $f\in H^0(\Omega)$. Таким образом, из леммы 1 и теоремы 5 гл. IX следует, что оператор (7) конечно-мероморфно зависит от k при $\operatorname{Im} k>0$. Пусть $b\geqslant a$ и

$$\widehat{R}_k = J_1 R_k J_2: H_a^0\to H_{(b)}^m,\ \operatorname{Im} k>0, \tag{8}$$

где $J_2: H^0_a\to H^0$ — оператор вложения, J_1 — оператор ограничения на область Ω_b. Оператор (8) отличается от оператора, определенного в формулах (38), (39) предыдущей главы, еще бо́льшим сужением области определения оператора R_k и бо́льшим расширением пространства, в котором рассматривается результат действия оператора. Если обозначить временно оператор, определенный в формулах (38), (39) гл. IX через $\widehat{R}_{k,\Phi}$, то связь между ним и оператором (8) будет иметь вид

$$\widehat{R}_k = J_1'\widehat{R}_{k,\Phi} J_2', \tag{9}$$

где оператор J_2' каждой функции $f\in H^0_a$ ставит в соответствие $(f, 0)\in H^0{}_\Phi{}^{-1}(\Omega, \Gamma)$, а $J_1'=J_1 I_1$. В дальнейшем всюду под оператором $\widehat{R}_k$ будет пониматься оператор (8). Мы сознательно воспользовались обозначениями предыдущей главы, имея в виду, что операторы $\widehat{R}_k$ и $\widehat{R}_{k,\Phi}$ отличаются несущественно, и для оператора (8) в силу формулы (9) справедливы все утверждения, полученные для $\widehat{R}_k$ в предыдущей главе. Ниже будем ссылаться на них применительно к оператору (8) без каких-либо дополнительных пояснений. Отметим еще, что, указав в формулах (7), (8) на то, что $\operatorname{Im} k>0$, мы выделили один из двух существующих операторов $\widehat{R}_k$ (см. замечание 3 к теореме 6 гл. IX). Для удобства дальнейших ссылок сформулируем часть утверждений теоремы 6 гл. IX в виде отдельной теоремы.

Теорема 1. *Пусть для задачи* (2) *выполнены условия A и B. Тогда оператор* $\widehat{R}_k$, *определенный первоначально формулой* (8) *при* $\operatorname{Im} k>0$, *допускает конечно-мероморфное продолжение на область* $\mathcal{D}_n$ (всю плоскость параметра k, если n нечетно, или риманову поверхность функции $\ln k$, если n четно).

Продолженный оператор мы также обозначаем через $\widehat{R}_k$.

Обозначим через $U_{\alpha,\beta}$, α, $\beta>0$, область в комплексной плоскости k, для точек которой

$$|\operatorname{Im} k|<\alpha \ln|\operatorname{Re} k|-\beta. \tag{10}$$

В случае четного n к этому неравенству надо добавить еще условие $-\pi/2<\arg k<3\pi/2$. Основной результат следующего параграфа, на основе которого в § 3 будет получена асимптотика при $t\to\infty$ решений нестационарной задачи, состоит в следующем.

Теорема 2. *Пусть для задачи* (2) *выполнены условия A, B, C′, D. Тогда существуют такие константы* C, T, α, $\beta<\infty$, *что при* $k\in U_{\alpha,\beta}$ *имеют место оценки*

$$\|\widehat{R}_k\varphi\|_{m-j,(b)}\leqslant C|k|^{1-j}e^{T|\operatorname{Im} k|}\|\varphi\|_{0,a},\quad 0\leqslant j\leqslant m+1, \tag{11}$$

$$\|\widehat{R}_k\varphi-(-ik)^{-m}\varphi\|_{-2,(b)}\leqslant C|k|^{-m-1}e^{T|\operatorname{Im} k|}\|\varphi\|_{0,a}. \tag{12}$$

Оценка (12) показывает точность оценок (11).

На протяжении всей главы константы a и b считаются фиксированными и мы не будем следить за зависимостью каких-либо величин от a и b.

§ 2. Коротковолновая асимптотика решений стационарных задач

В этом параграфе будет доказана теорема 2 и получен главный член асимптотики $\widehat{R}_k$ при $k\in U_{\alpha,\beta}$, $|k|\to\infty$. Предварительно введем некоторые обозначения и получим необходимые для дальнейшего вспомогательные утверждения.

Через $L_2(R^1;\ H)$ будет обозначаться пространство L_2 на прямой со значениями в гильбертовом пространстве H. В этой главе не будет встречаться оператор преобразования Фурье по переменной x. Поэтому если $u=u(t, x)$, то через $\widetilde{u}$ будет обозначаться функция $F_{t\to k}u$. Ниже неоднократно будет применяться оператор $F_{t\to k}$ к функциям, определенным только при $t>0$. В этих случаях подразумевается, что функция продолжена нулем в область $t<0$. Следующая лемма очевидна.

Лемма 2. *Пусть* $F(t):C_0^\infty(\Omega_a)\to C^\infty(\Omega_b)$ — *оператор с бесконечно дифференцируемым при* $|x_0|<a$, $|x|<b$, $t\in R^1$ *ядром, равным нулю при* $|t|>\tau$. *Тогда при любом* s *оператор* $\widetilde{F}(k):H^0{}_a\to H^s{}_{(b)}$ *является целой функцией* k, *и при всех* k, *любых* s *и* $j\geqslant 0$

$$\|\widetilde{F}\varphi\|_{s,(b)}\leqslant C_{s,j}|k|^{-j}e^{\tau|\operatorname{Im} k|}\|\varphi\|_{0,a}.$$

Лемма 3. *Пусть* $u \in B^{m-1}_{(b),\tau}$, $\partial^j u/\partial t^j = 0$ *при* $t=0$, $0 < j < m-2$. *Тогда функция* $\tilde{u} = F_{t\to k} u$ *является целой функцией* k *со значениями в пространстве* $H^{m-1}_{(b)}$ *и при всех* k *и* $1 < j < m$ *обладает оценками*

$$\|\tilde{u}\|_{m-j,(b)} \leqslant C|k|^{1-j} e^{\tau|\mathrm{Im}\, k|} \|u\|_{B^{m-1}_{(b)}}.$$

Доказательство. Утверждения леммы следуют из того, что функцию u, продолженную нулем при $t<0$, можно рассматривать как операторнозначную функцию t, равную нулю при $t<$ <0 и $t>\tau$ и такую, что

$$\partial^{j-1} u/\partial t^{j-1} \in L_2(R^1;\ H^{m-j}_{(b)}),\ 1 \leqslant j \leqslant m. \quad \blacksquare$$

Лемма 4. *Пусть* H_1, H_2 — *гильбертовы пространства,* $N(t): H_1 \to H_2$ — *семейство ограниченных операторов, бесконечно дифференцируемо зависящих от* t *при* $t \in R^1$, *аналитически зависящих от* t *при* $\mathrm{Re}\, t > T > 0$ *и равных нулю при* $t<0$. *Пусть существуют такие константы* j_0 *и* C_j, *что при всех* $j \geqslant 0$

$$\left\| \frac{\partial^j}{\partial t^j} N(t) \right\| \leqslant C_j |t|^{j_0 - j},\ \mathrm{Re}\, t > T.$$

Тогда оператор

$$\tilde{N} = F_{t\to k} N(t): H_1 \to H_2, \quad \mathrm{Im}\, k > 0,$$

продолжается аналитически в область $-\pi/2 < \arg k < 3\pi/2$ *и имеет при* $|k| \geqslant 1$ *оценки*

$$\|\tilde{N}\| < C_j |k|^{-j} e^{T|\mathrm{Im}\, k|}, \qquad j \geqslant 0. \tag{13}$$

Если к тому же $N(t)$ *является многочленом по* t *при* $\mathrm{Re}\, t > T$, *то* $\tilde{N}$ *аналитически зависит от* k *при всех* $k \neq 0$.

Доказательство. Очевидно, оператор $\tilde{N}$ определен и аналитически зависит от k при $\mathrm{Im}\, k > 0$. При этом

$$\tilde{N} = (-ik)^{-j} \int_0^\infty [N(t)]_t^{(j)} e^{ikt}\, dt. \tag{14}$$

Обозначим через $l_\pm$ контуры в комплексной плоскости t, образованные отрезком $[0, T]$ и лучами $[T, T \pm i\infty)$. При $j \geqslant j_0 + 2$ контур интегрирования в (14) можно в зависимости от значения k заменить на l_+ или l_-. Точнее, при $j \geqslant j_0 + 2$ справедливы равенства

$$\tilde{N} = (-ik)^{-j} \int_{l_+} N_t^{(j)} e^{ikt}\, dt,\ 0 < \arg k < \pi/2;$$

$$\tilde{N} = (-ik)^{-j} \int_{l_-} N_t^{(j)} e^{ikt}\, dt,\ \pi/2 < \arg k < \pi.$$

Первая из этих формул позволяет продолжить аналитически оператор $\tilde{N}$ в полуплоскость $\operatorname{Re} k>0$, вторая — в полуплоскость $\operatorname{Re} k<0$. При этом получится аналитическая функция k, если $N(t)$ — многочлен по t при $|t|\geqslant T$ и, значит, $N_t^{(j)}\equiv 0$ при $j>j_0$ и $\operatorname{Re} t\geqslant T$. Из этих же формул сразу следуют оценки (13) при $j>$ $\geqslant j_0+2$ и, значит, при всех $j\geqslant 0$. ■

Обозначим через $E^0(t, x, x_0)$ матрицу Грина задачи Коши для оператора L_0 (см. формулу (1)), т. е. решение задачи

$$\begin{cases} L_0\left(i\dfrac{\partial}{\partial t},\ i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)E^0=0,\ t>0, \\ \left.\dfrac{\partial^j E^0}{\partial t^j}\right|_{t=0}=\begin{cases}0, & j<m-1, \\ \delta(x-x_0)\mathcal{I}, & j=m-1,\end{cases} \end{cases} \tag{15}$$

где $\delta(x-x_0)$ — дельта-функция, $\mathcal{I}$ — единичная матрица. Как уже отмечалось, из условия A следует, что порядок ml оператора $\det L_0$ четен. В этом случае при нечетном n имеет место принцип Гюйгенса, т. е. внутренняя пола характеристического конуса оператора L_0 будет лакуной при $m<n+1$ и слабой лакуной порядка не выше $m-n-1$ (т. е. E^0 будет там многочленом порядка не выше $m-n-1$) при $m\geqslant n+1$ [58, 44]. Следующая лемма является следствием явных формул (Герглотца — Петровского [46]) для E^0 и заменяет (вместе с леммой 4) отсутствующий в случае четной размерности пространства принцип Гюйгенса. Обозначим через i_τ пространство $l\times l$-матриц $u=u(t, x, x_0)$, определенных в области

$$Q_\tau=\{(t, x, x_0):\operatorname{Re} t\geqslant\tau,\quad |x|\leqslant b,\quad |x_0|\leqslant a\}$$

бесконечно дифференцируемых по совокупности переменных, аналитических по t и при некотором j_0 и любых j, $p=(p_1, \ldots, p_n)$, $q=(q_1, \ldots, q_n)$ имеющих оценки

$$\left\|\frac{\partial^j}{\partial t^j}D_x^p D_{x_0}^q u\right\|\leqslant C_{j,p,q}|t|^{j_0-j},\ (t, x, x_0)\in Q_\tau.$$

Здесь $\|v\|$ — максимальный из модулей элементов матрицы v.

Лемма 5. *Существует такое τ', что $E^0\in i_{\tau'}$. Если n нечетно, то E^0 является многочленом по t при $(t, x, x_0)\in Q_{\tau'}$ порядка не выше $m-n-1$ ($E^0=0$ при $m<n-1$).*

Очевидно, функцию $\tau=\tau(d)$ в условии D можно считать неубывающей и бесконечно дифференцируемой, так как в противном случае ее можно заменить на бóльшую функцию, обладающую указанными свойствами. Пусть $\tau=\tau_1(d)$ — неубывающая, бесконечно дифференцируемая функция при $d\geqslant 0$ такая, что $\tau_1(d)>\tau(d)$ при всех $d\geqslant 0$, $\tau_1(0)>\tau(b)+1$ и расстояние между кривыми $\tau=\tau(d)$ и $\tau=\tau_1(d)$, $d\geqslant 0$, в плоскости $R^2_{\tau,d}$ не меньше единицы. Тогда существует функция $\zeta=\zeta(t, x)$, $\zeta\in C^\infty(R^{n+1})$, такая, что $\zeta=1$ при $t<\tau(|x|)$, $\zeta=0$ при $t>\tau_1(|x|)$, $\zeta=\zeta(t)$ при

$|x|<b$ и при всех j и $p=(p_1, ..., p_n)$

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial t^j} D_x^p \zeta\right| < C_{j,p}. \tag{16}$$

Зафиксируем функцию ζ, обладающую указанными свойствами.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия A, B, C, D и $\varphi \in H^0{}_a$. Тогда $\widetilde{\zeta P \varphi}$ является целой функцией k со значениями в пространстве $H_{(b)}{}^{m-1}$, и существуют такие константы C, C_j, T, α, $\beta < \infty$, что при всех k, $|k| > \varepsilon > 0$, справедливы оценки*

$$\|\widetilde{\zeta P \varphi}\|_{m-j,(b)} \leqslant C(\varepsilon)|k|^{1-j} e^{T|\mathrm{Im}\, k|} \|\varphi\|_{0,a}, \quad 0 \leqslant j \leqslant m+1, \tag{17}$$

$$\|\widetilde{\zeta P \varphi} - (-ik)^{-m} \varphi\|_{-2,(b)} \leqslant C|k|^{-1-m} e^{T|\mathrm{Im}\, k|} \|\varphi\|_{0,a}, \tag{18}$$

а при $k \in U_{\alpha,\beta}$ и любых $j \geqslant 0$ — оценки *

$$\|\hat{R}_k \varphi - \widetilde{\zeta P \varphi}\|_{m,(b)} \leqslant C_j |k|^{-j} e^{T|\mathrm{Im}\, k|} \|\varphi\|_{0,a}. \tag{19}$$

Доказательство. Обозначим через $D(\mathscr{L})$ пространство функций, принадлежащих $B^{m,\gamma}$ и удовлетворяющих однородным граничным условиям задачи (2), а через $\mathscr{L}$ — оператор, переводящий функции $u \in D(\mathscr{L})$ в $L(x, i\partial/\partial t, i\partial/\partial x)u$. Таким образом,

$$\mathscr{L} u = 0, \quad u_t^{(j)}\big|_{t=0} = \begin{cases} 0, & j < m-1, \\ \varphi, & j = m-1 \end{cases} \tag{20}$$

означает, что функция u принадлежит $D(\mathscr{L})$ и является решением задачи (2). Аналогично, задачу (4) будем кратко записывать в виде $\mathscr{L}_k u = \varphi$, где оператор $\mathscr{L}_k$ определен на пространстве $D(\mathscr{L}_k)$, состоящем из функций, принадлежащих H^m и удовлетворяющих граничным условиям задачи (4), и $\mathscr{L}_k u \equiv L(x, k, i\partial/\partial x)u$.

Так как функция ζ обладает оценками (16) и не зависит от x при $|x| \leqslant b$, то оператор умножения на ζ переводит пространство $D(\mathscr{L})$ в себя. Учитывая еще, что $P\varphi$ является решением задачи (20) при $\varphi \in C_0{}^\infty(\Omega) \cap H^0{}_a$, получаем, что при этих φ

$$\mathscr{L}(\zeta P \varphi) = F\varphi, \quad (\zeta P \varphi)_t^{(j)}\big|_{t=0} = \begin{cases} 0, & j < m-1, \\ \varphi, & j = m-1, \end{cases} \tag{21}$$

где $F\varphi = \{\mathscr{L}, \zeta\} P\varphi$ и $\{\mathscr{L}, \zeta\}$ — коммутатор $\mathscr{L}$ и оператора умножения на ζ. Так как $\{\mathscr{L}, \zeta\} = 0$ при $t < \tau(|x|)$ и $t > \tau_1(|x|)$, то в силу условия D оператор F является интегральным оператором с бесконечно дифференцируемым при $|x_0| < a$ ядром f, равным

$$f(t, x, x_0) = \{\mathscr{L}, \zeta\} E(t, x, x_0), \quad |x_0| < a, \tag{22}$$

* Если предположить $|||u|||_{m+s-1,\gamma} \leqslant c_s \|\varphi\|_s$, $s > 0$, вместо (5), то в (19) можно заменить m на s и 0 на $-s$. В доказательстве меняется только $H_1 = H^0{}_a$ на $H_1 = H_a{}^{-s}$.

и $f=0$ при $t\leqslant\tau(|x|)$ и $t\geqslant\tau_1(|x|)$. Наконец, из оценок (16) и условия C следует, что

$$|||\zeta P\varphi|||_{m-1,\gamma}\leqslant C\|\varphi\|_{0,a}. \tag{23}$$

Поскольку $\zeta=0$ при $t>\tau_1(|x|)$, то из (23) и леммы 3 следует указанная в теореме 3 аналитичность функции $\widetilde{\zeta P\varphi}$, а также справедливость оценок (17) при $1\leqslant j\leqslant m$. Получим оценку (17) при $j=m+1$ и оценку (18). Для этого применим к задаче (20) преобразование Фурье по t. Получим, что при $\varphi\in C^\infty{}_0(\Omega)\cap H^0{}_a$ и $\operatorname{Im} k>\gamma$ функция $\widetilde{\zeta P\varphi}$ принадлежит $D(\mathscr{L}_k)$ и

$$\mathscr{L}_k\widetilde{\zeta P\varphi}=\varphi+\widetilde{F\varphi}. \tag{24}$$

Возьмем ограничение правой и левой частей равенства (24) на область Ω_b. Тогда как элементы $H_{(b)}{}^{-1}$ они будут аналитически продолжаться на всю комплексную плоскость k. Для левой части это следует из уже доказанной аналитичности функции $\widetilde{\zeta P\varphi}$, для правой — из леммы 2, примененной к оператору F. Запишем теперь матрицу $\mathscr{L}_k$ в виде

$$\mathscr{L}_k=(-ik)^m I+\sum_{j=0}^{m-1}(-ik)^j N_{m-j}\left(x,\ i\frac{\partial}{\partial x}\right), \tag{25}$$

где I — единичный оператор, N_{m-j} — дифференциальные операторы порядка $m-j$. Подставим в (24) вместо $\mathscr{L}_k$ разложение (25) и затем перенесем из левой части в правую все слагаемые, кроме $(-ik)^m\widetilde{\zeta P\varphi}$. После этого оценим норму в $\tilde{H}_{(b)}{}^{-1}$ левой части через сумму норм слагаемых правой части равенства. Учитывая уже доказанные оценки (17) и оценку для $F\varphi$, вытекающую из леммы 2, получим оценку (17) при $j=m+1$ и $\varphi\in C_0{}^\infty(\Omega)\cap H^0{}_a$. По непрерывности эта оценка справедлива для всех $\varphi\in H^0{}_a$. Аналогично из (24) получается оценка (18).

Чтобы получить оценку (17) при $j=0$, запишем равенство (24) в виде

$$\mathscr{L}_0\widetilde{\xi P\varphi}=\varphi+\widetilde{F\varphi}-(\mathscr{L}_k-\mathscr{L}_0)\widetilde{\zeta P\varphi}.$$

Из условий A, B следует, что эта задача (для оператора $\mathscr{L}_0$) эллиптична, и, значит, можно воспользоваться локальными априорными оценками, полученными в теоремах 5, 6 гл. VI. Из них следует, что если $\widetilde{\zeta P\varphi}\in H^m_{(b+1)}$ и эта функция удовлетворяет граничным условиям задачи (4), то

$$\|\widetilde{\zeta P\varphi}\|_{m,(b)}\leqslant C\,[\,\|\varphi+\widetilde{F\varphi}-(\mathscr{L}_k-\mathscr{L}_0)\widetilde{\zeta P\varphi}\|_{0,(b+1)}+\|\widetilde{\zeta P\varphi}\|_{0,(b+1)}\,]. \tag{26}$$

где константа C не зависит от k. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \cap H^0_a$ и, значит, $\zeta P \varphi \in B^m_{(d),\tau}$ при любом d и $\tau = \tau_1(d)$. Тогда $\widetilde{\zeta P \varphi}$ как элемент $H^m_{(b+1)}$ будет целой функцией k. При тех же φ функция $\zeta P \varphi$ и, значит $\widetilde{\zeta P \varphi}$ удовлетворяет граничным условиям задач (2), (4). Значит, при указанных φ оценка (26) справедлива при всех комплексных k. Теперь распишем в (26) $\mathscr{L}_k - \mathscr{L}_0$ в виде суммы однородных по k операторов с помощью (25) и оценим норму правой части в (26) через сумму норм слагаемых. Норма $\widetilde{F\varphi}$ оценивается с помощью леммы 2, а норма остальных слагаемых — с помощью оценок (17) при $1 < j < m$. Нужно только заметить, что в лемме 2 и оценках (17) константу b можно было взять любой и, значит, ее можно заменить на $b+1$. Это приводит к оценке (17) с $j=0$ при $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \cap H^0_a$ и, значит, при любых $\varphi \in H^0_a$.

Заметим, что задача (21) приводит к стационарной задаче (24), в которой «невязка» $\widetilde{F\varphi}$ мала при $k \to \infty$, но не имеет компактного по x носителя. Чтобы доказать оценки (19), будет построен некий «компенсатор», позволяющий получить в стационарной задаче малую «невязку» с компактным носителем.

Продолжим функцию (22) по x бесконечно дифференцируемо в $R^n \setminus \Omega$ так, чтобы продолженная функция, которую мы будем продолжать обозначать через f, оставалась равной нулю при (x, t) таких, что $|x| \leqslant a$, $t > \tau_1(a)$. Пусть $v = v(t, x, x_0)$ — решение задачи Коши

$$\begin{cases} L_0\left(i\dfrac{\partial}{\partial t}, i\dfrac{\partial}{\partial x}\right) v = f; \ t > 0, \ x \in R^n, \ x_0 \in \overline{\Omega}_a; \\ \dfrac{\partial^j v}{\partial t^j} = 0, \ t = 0, \ 0 \leqslant j \leqslant m-1. \end{cases} \tag{27}$$

Тогда $v \in C^\infty(\overline{R^1_+ \times R^n \times \overline{\Omega}_a})$. Через $V(t)$ обозначим интегральный оператор из $C_0^\infty(\Omega_a)$ в $C^\infty(R^n)$ с ядром $v(t, x, x_0)$. Пусть $\psi \in C^\infty(R^n)$, $\psi = 1$ при $|x| > a$, $\psi = 0$ в некоторой окрестности компакта $R^n \setminus \Omega$. «Компенсатором», о котором речь шла выше, будет оператор $-\psi V(t)$.

Покажем, что

$$W\varphi \equiv \zeta P \varphi - \psi V(t) \varphi \in D(\mathscr{L}) \text{ при } \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \cap H^0_a, \tag{28}$$

может быть, с бо́льшим, чем раньше, значением константы γ ($u \in B^{m,\gamma}$, если $u \in D(\mathscr{L})$). Действительно, как отмечалось выше, $\zeta P \varphi \in D(\mathscr{L})$. Далее, так как $P\varphi \in B^{m,\gamma}$ и $F\varphi = \{\mathscr{L}, \zeta\} P \varphi$, где $\{\mathscr{L}, \zeta\}$ — оператор порядка не выше $m-1$, коэффициенты которого обладают оценками типа (16), то $F\varphi \in B^{1,\gamma}$. Тогда из стандартных оценок для решений задачи Коши [48, 117, 41] вытекает, что $V(t)\varphi \in B^{m,\gamma}$, возможно, с бо́льшим значением γ. А так как $\psi = 0$ в окрестности Γ, то $\psi V(t) \varphi \in D(\mathscr{L})$, и это доказывает включение (28).

Подставим функцию (28) в задачу (20). Учитывая (21) и (27), получим, что при $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \cap H^0_a$

$$\mathscr{L} W \varphi = -QV(t)\varphi + \mathscr{L}(1-\psi) V(t)\varphi, \quad (W\varphi)_t^{(j)}\big|_{t=0} = \begin{cases} 0, & j < m-1 \\ \varphi, & j = m-1. \end{cases} \tag{29}$$

Теперь «невязка» (правая часть в уравнении (29)) бесконечно дифференцируема и равна нулю при $|x| > a$. Существенно, что она обладает достаточно хорошими свойствами при $t \to \infty$, позволяющими оценить при больших $|k|$ ее преобразование Фурье по t. Сделав в задаче (29) преобразование Фурье и учитывая (28), получим, что при $\operatorname{Im} k > \gamma$ и $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \cap H^0_a$ функция $\widetilde{W\varphi}$ принадлежит $D(\mathscr{L}_k)$ и

$$\mathscr{L}_k \widetilde{W\varphi} = \varphi + N(k)\varphi, \quad N(k) = -\widetilde{QV} + \mathscr{L}_k[(1-\psi)\widetilde{V}]. \tag{30}$$

Рассмотрим N как оператор, действующий из пространства H^0_a в H^0_a. Пусть при некотором k из полуплоскости $\operatorname{Im} k > \gamma$ его норма не превосходит $1/2$. Тогда оператор $I+N$ переводит $C_0^\infty(\Omega) \cap H^0_a$ в плотное в H^0_a множество. Обозначим его через $H(k)$. Из (30) получаем, что при тех k из полуплоскости $\operatorname{Im} k > \gamma$, для которых $\|N\| < 1/2$,

$$R_k \psi = \widetilde{W(1+N)^{-1}\psi}, \quad \psi \in H(k). \tag{31}$$

Займемся теперь изучением оператора N. Обозначим через I_T пространство операторов, удовлетворяющих условиям леммы 4 с $H_1 = H^0_a$ и $H_2 = H^s_{(b)}$ при любом s. Покажем, что оператор $V(t)$, продолженный нулем при $t<0$, принадлежит I_T при некотором $T < \infty$. Продолжим функцию v, обобщенное ядро E оператора P, функцию Грина E^0 задачи Коши (15) и функцию f нулем при $t<0$. Тогда

$$L_0\left(i\frac{\partial}{\partial t}, i\frac{\partial}{\partial x}\right) E_0 = \delta(t)\,\delta(x-x_0)\,\mathscr{I}, \quad t \in R^1, \ x \in R^n,$$

$$L\left(x, i\frac{\partial}{\partial t}, i\frac{\partial}{\partial x}\right) \zeta E = \delta(t)\,\delta(x-x_0)\,\mathscr{I} + f(t, x, x_0), \quad t \in R^1, \ x \in \Omega.$$

Поэтому, если ψ — введенная выше функция и $\psi\zeta E$ считается продолженной нулем по x в область $R^n \setminus \Omega$ (где $\psi \equiv 0$), то при $(t, x) \in R^{n+1}$

$$L\left(x, i\frac{\partial}{\partial t}, i\frac{\partial}{\partial x}\right)(\psi\zeta E) = \psi\delta(t)\,\delta(x-x_0)\,\mathscr{I} + \psi f + \{L, \psi\}\,\zeta E.$$

Положив теперь

$$v = \psi\zeta E - E^0 + u, \tag{32}$$

получим, что функция u является решением задачи

$$\begin{cases} L_0\left(i\dfrac{\partial}{\partial t},\ i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u=g,\ (t,\ x)\in R^{n+1}, \\ u=g=0,\quad t<0, \end{cases} \tag{33}$$

где

$$g=(1-\psi)\delta(t)\delta(x-x_0)\mathcal{I}+(1-\psi)f-\{L,\ \psi\}\zeta E+Q(\psi\zeta E).$$

Функция g равна нулю, если $|x|>a$ или $t>\tau_1(a)$. Обозначим через G интегральный оператор с ядром g. Из ограниченности оператора $P:H^0{}_a\to B^{m-1,\gamma}$ вытекает ограниченность оператора

$$G:H^0{}_a\to H^{-1}(R^{n+1}). \tag{34}$$

Так как решение задачи (33) дается сверткой E^0 и g (по всем переменным) и $g=0$ при $|x|<a$, при $t<0$ и при $t>\tau_1(a)$, то из леммы 5 и ограниченности оператора (34) следует, что $h(t)U(t)\in I_T$, где $U(t)$ — интегральный оператор с ядром u, $T=\tau_1(a)+\tau'+1$, $h\in C^\infty(R^1)$, $h=1$ при $t>T$, $h=0$ при $t<T-1$. В силу той же леммы 5 пространству I_T принадлежит интегральный оператор с ядром $h(t)E^0$. Так как, кроме того, $\psi\zeta E=0$, когда $|x|\leqslant b$, $t\geqslant T-1$ (напомним, что $T-1>\tau_1(a)\geqslant\tau_1(0)>\tau(b)$), то из (32) следует, что $h(t)V\in I_T$. Поскольку функция v бесконечно дифференцируема, отсюда вытекает, что $V\in I_T$. Значит, согласно лемме 4 при любом s оператор

$$\widetilde{V}: H^0_a\to H^s_{(b)},\quad -\pi/2<\arg k<3\pi/2$$

аналитически зависит от k (при нечетном n он аналитичен при $k\neq 0$) и обладает при $|k|\geqslant 1$ и любом $j\geqslant 0$ оценками

$$\|\widetilde{V}\varphi\|_{s,(b)}\leqslant C_{s,j}\,|k|^{-j}\,e^{T|\mathrm{Im}\,k|}\,\|\varphi\|_{0,a}. \tag{35}$$

Выберем теперь константы α, β так, чтобы

$$\|N\varphi\|_{0,a}\leqslant\frac{1}{2}\|\varphi\|_{0,a}\ \text{при}\ k\in U_{\alpha,\beta}.$$

Существование таких констант следует из (35) и формулы (30) для оператора N. Тогда при $k\in U_{\alpha,\beta}\cap\{k:\mathrm{Im}\,k>\gamma\}$ справедливо равенство (31). Взяв ограничение обеих частей этого равенства на область Ω_b и вспомнив вид оператора W (формула 28)), получим, что при $k\in U_{\alpha,\beta}\cap\{k:\mathrm{Im}\,k>\gamma\}$ и $\varphi\in H(k)$

$$\widehat{R}_k\varphi=\widetilde{\zeta Pf}-\psi\widetilde{V}f,\quad f=(I+N)^{-1}\varphi,\quad (x\in\Omega_b). \tag{36}$$

Из (23) следует, что $\|\widetilde{\zeta Pf}\|_{m-1,(b)}\leqslant C(k)\|f\|_{0,a}$. Поскольку, кроме того, $\|N\|<{}^1/_2$, а для $\widetilde{V}$ имеют место оценки (35), то из справедливости равенства (36) на плотном множестве $H(k)\subset H^0{}_a$ вытекает его справедливость при всех $\varphi\in H^0{}_a$. Далее, поскольку обе

части равенства (36) как элементы $H_{(b)}^{m-1}$ продолжаются аналитически на область $U_{\alpha,\beta}$, то оно справедливо при всех $k \in U_{\alpha,\beta}$. Наконец, поскольку оценки, аналогичные (35), справедливы для оператора N (см. формулу (30)), то из (35), (36) и (17) вытекают оценки (19). ∎

Доказательство теоремы 2. При выполненном условии C теорема 2 является следствием теоремы 3. Пусть вместо условия C выполнено условие C'. Доказательство теоремы 3 было приведено в таком виде, чтобы его можно было использовать в этом случае для получения некоторого аналога теоремы 3, содержащего утверждения теоремы 2. Укажем на те изменения, которые при этом нужно сделать. Вместо оператора P надо использовать P_μ, $P_\mu \varphi = (P\varphi) * \mu$, где $\mu \in C_0^\infty(R^1)$, $\operatorname{supp} \mu \in [0, 1]$ и

$$\int_0^1 |\mu|^2 \, dt = 1, \tag{37}$$

а функцию ζ заменить на ζ_1, $\zeta_1(t, x) = \zeta(t-1, x)$. Все встречающиеся после этого функции и матрицы будут, вообще говоря, зависеть от μ. В частности, вместо E и E^0 в соответствующих формулах будут участвовать $E_\mu = E * \mu$ и $E_\mu^0 = E^0 * \mu$. В нестационарных задачах (20), (21) надо считать начальные условия нулевыми, а в правой части уравнений добавить слагаемое $\mu(t)\varphi$. В соответствующих стационарных задачах (24), (25), (30) надо заменить φ на $\widetilde{\mu}(k)\varphi$.

Оценки (17) при $1 < j < m$ для $\widetilde{\zeta P_\mu \varphi}$ будут справедливы с константой C, не зависящей в силу (37) от функции μ. Из-за указанных изменений в уравнениях (24), (25), (30) оценки (17) при $j = 0$ и $j = m+1$ для $\widetilde{\zeta P_\mu \varphi}$ будут иметь место с константой $C = C_1 + C_2 \widetilde{\mu}(k)$, где C_1, C_2 не зависят от μ. Вместо (20) будет справедлива аналогичная оценка для функции $\widetilde{\zeta P_\mu \varphi} - (-ik)^m \widetilde{\mu}(k) \varphi$ с константой $C = C_1 + C_2 \widetilde{\mu}(k)$, где C_1, C_2 не зависят от μ.

Далее, вместо формулы (36) будет иметь место следующее соотношение

$$\widehat{R}_k \varphi = \widetilde{\zeta P_\mu f} - \psi \widetilde{V}_\mu f, \quad f = (\widetilde{\mu}(k) I + N_\mu(k))^{-1} \varphi, \tag{38}$$

справедливое при тех k из полуплоскости $\operatorname{Im} k < \gamma$, для которых оператор $(\widetilde{\mu}(k) I + N_\mu(k))$ обратим.

Наконец, заметим, что максимум функции $f_\mu = \{\mathscr{L}, \zeta\} E_\mu$ и ее производных оценивается на любом компакте константой, не зависящей от μ (если выполнено условие (37)). Точно так же норма оператора G_μ (формула (34)) оценивается константой, не зависящей от μ. Это приводит к тому, что для оператора $\widetilde{V}_\mu$ константы $C_{s,j}$ в оценках (35) можно выбрать не зависящими от μ,

и, значит, аналогичные оценки с независящими от μ константами справедливы для оператора N_μ. В частности, при любом $j \geqslant 0$

$$\| N_\mu^j(k)\varphi\|_{0,a} \leqslant C_j |k|^{-j} e^{T|\mathrm{Im}\,k|} \|\varphi\|_{0,a}. \tag{39}$$

Зафиксируем какую-нибудь функцию μ, удовлетворяющую указанным выше условиям, и пусть точка k_0 такова, что $\tilde{\mu}(k_0) = c_0 \neq \neq 0$. Выберем теперь константы α, β так, чтобы при $k \in U_{\alpha,\beta}$

$$|c_0|^{-1} C_1 |k|^{-1} e^{(T+1)|\mathrm{Im}\,k| + |\mathrm{Im}\,k_0|} < \frac{1}{2}, \tag{40}$$

где константы C_1, T — те же, что и в формуле (39). Теперь возьмем произвольную точку $\varkappa \in U_{\alpha,\beta}$ и всюду функцию μ заменим на $\mu_\varkappa$:

$$\mu_\varkappa(t) = \rho(\varkappa)\mu(t) e^{i(k_0 - \varkappa)t},$$

где константа $\rho(\varkappa)$ подбирается так, чтобы было выполнено условие (37). Очевидно,

$$e^{-|\mathrm{Im}\,k| - |\mathrm{Im}\,k_0|} \leqslant \rho(\varkappa) \leqslant e^{|\mathrm{Im}\,k| + |\mathrm{Im}\,k_0|}.$$

Это вместе с соотношением $\tilde{\mu}_\varkappa(k)|_{k=\varkappa} = c_0\rho(\varkappa)$ и оценкой (40) приводит к тому, что оператор

$$\tilde{\mu}_\varkappa(k) I + N_{\mu_\varkappa}(k) : H_a^0 \to H_a^0 \tag{41}$$

при $k = \varkappa$ обратим. Поскольку в силу оценок (35) для оператора $N_{\mu_\varkappa}(k)$ этот оператор компактен, то из теоремы 8 гл. VI следует, что оператор, обратный к (41), мероморфно зависит от k. Это доказывает справедливость равенства (38) при $\mu = \mu_\varkappa$ для всех $k \in U_{\alpha,\beta}$. Если в (38) с $\mu = \mu_\varkappa$ положить $k = \varkappa$ и воспользоваться оценками для V_μ, N_μ и $\zeta P_\mu \varphi$, в которых зависимость констант от μ была указана выше, то получим оценки (11), (12) в точке $k = \varkappa \in U_{\alpha,\beta}$ (в которых константы C, T не зависят от $\varkappa$). Остается напомнить, что $\varkappa$ — произвольная точка области $U_{\alpha,\beta}$. ■

§ 3. Асимптотика при $t \to \infty$ решений смешанных задач

Пусть $v \in B^{m-1,t}$ — решение задачи

$$\begin{cases} L\left(x, i\dfrac{\partial}{\partial t}, i\dfrac{\partial}{\partial x}\right) v(t,x) = 0, \ x \in \Omega, \ t > 0; \\ B\left(x, i\dfrac{\partial}{\partial x}\right) v(t,x)|_\Gamma = 0, \quad t > 0; \\ v_t^{(j)}(0,x) = 0, \ 0 \leqslant j \leqslant m-2, \ v_t^{(m-1)}(0,x) = f(x), \ x \in \Omega \end{cases} \tag{42}$$

или решение задачи

$$\begin{cases} L\left(x,\ i\dfrac{\partial}{\partial t},\ i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)v(t,x)=f(x)e^{-i\omega t},\ x\in\Omega,\ t>0; \\ B\left(x,\ i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)v(t,x)|_\Gamma=0,\ t>0; \\ v_t^{(j)}(0,x)=0,\ 0\leqslant j\leqslant m-1,\ x\in\Omega. \end{cases} \tag{43}$$

Здесь и ниже область Ω и операторы L, B — те же, что и в § 1, 2, $f\in H^0{}_a$, ω — произвольное комплексное число, $\zeta=\gamma$ для задачи (42), $\zeta>\max(\gamma, \operatorname{Im}\omega)$ для задачи (43), где γ определено в условии C. В течение всего параграфа без дальнейших напоминаний (даже в формулировках теорем) подразумеваются выполненными условия A, B, C', D. Под решением задач (42), (43) понимается решение в следующем (сильном) смысле. Пусть v_n — классическое, т. е. принадлежащее пространству $B^{m,\zeta}$, решение задачи (42) или (43) с функцией $f_n\in C_0^\infty(\Omega)\cap H^0{}_a$ вместо f. Будем говорить, что $v\in B^{m-1,\zeta}$ является решением задачи (42) или (43), если существует такая последовательность функций $f_n\in\in C_0^\infty(\Omega)\cap H^0{}_a$, сходящаяся к f в пространстве $H^0{}_a$ при $n\to\infty$, что соответствующая ей последовательность v_n классических решений задачи сходится к v в пространстве $B^{m-1,\zeta}$. Если выполнено условие C, то указанные сильные решения задач (42), (43) существуют для любой функции $f\in H^0{}_a$ и единственны. Решение задачи (42) равно Pf, а решение задачи (43) строится с помощью оператора P и принципа Дюамеля. Если выполнено условие C', то задача (43) однозначно разрешима при всех $f\in H^0{}_a$, а задача (42), возможно, имеет решение не при всех $f\in H^0{}_a$.

Как и выше через $L_2(R^1;N)$ будем обозначать пространство L_2 на прямой $-\infty<t<\infty$ или на прямой $\operatorname{Im}k=\mathrm{const}$ в комплексной плоскости k со значениями в гильбертовом пространстве N. Пусть $v\in L_2^\nu(R^1;N)$ если $v=v(t)$ и $v\exp(-\nu t)\in L_2(R^1;N)$, причем

$$\|v\|_{L_2^\nu(R^1;N)}=\|e^{-\nu t}v\|_{L_2(R^1;N)}.$$

Напомним, что константа γ определена в условии C, для задачи (42) $\zeta=\gamma$, а для задачи (43) ζ — любая константа такая, что $\zeta>\max(\gamma, \operatorname{Im}\omega)$.

Лемма 6. *При* $\operatorname{Im}k>\gamma$ *оператор* (7) *не имеет полюсов.*

Если решение $v\in B^{m-1,\zeta}$ *задачи* (42) *или* (43) *продолжить нулем при* $t<0$ *и рассмотреть как элемент пространства* $L_2^\nu(R^1;\ H^{m-1})$ *с любым* $\nu>\zeta$, *то оно будет представляться в виде:*

$$v=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{i\nu-\infty}^{i\nu+\infty}R_kfe^{-ikt}\,dk \text{ — для задачи (42)}, \tag{44}$$

$$v = \frac{i}{2\pi} \int_{i\nu-\infty}^{i\nu+\infty} R_k \frac{f}{k-\omega} e^{-ikt}\, dk \text{ — для задачи (43)}, \tag{45}$$

где интегралы сходятся в пространстве $\tilde{L}_2^{\nu}(R^1;\ H^{m-1})$.

Доказательство. Если функция $v \in B^{m-1,\gamma}$ продолжена нулем при $t<0$, то $v \in L_2^{\gamma}(R^1;\ H^{m-1})$ и функция

$$\tilde{v}(k, x) = \int_0^{\infty} v(t, x)\, e^{ikt}\, dt$$

как элемент H^{m-1} определена и аналитически зависит от k при $\operatorname{Im} k > \gamma$. Кроме того, на любой прямой $\operatorname{Im} k = \nu$, $\nu > \gamma$ функция $\tilde{v}$ принадлежит $L_2(R^1;\ H^{m-1})$ и имеет место формула обращения

$$v(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{i\nu-\infty}^{i\nu+\infty} \tilde{v}(k, x)\, e^{-ikt}\, dk, \tag{46}$$

где интеграл сходится в $L_2^{\nu}(R^1;\ H^{m-1})$.

Пусть $\{v_n\}$ — продолженная нулем при $t<0$ последовательность классических (принадлежащих $B^{m,\gamma}$) решений задачи (42) с $f = f_n \in C_0^{\infty} \cap H^0{}_a$, которая определяет решение $v \in B^{m-1,\gamma}$ задачи (42). Очевидно,

$$\tilde{v}_n = R_k f_n \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} k > \gamma.$$

Так как $v_n \to v$ в пространстве $L_2^{\gamma}(R^1;\ H^{m-1})$ при $n \to \infty$, то левая часть последнего равенства при $n \to \infty$ стремится в пространстве H^{m-1} к $\tilde{v}(k, x)$. Поэтому, переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем, что

$$\tilde{v}(k, x) = R_k f \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} k > \gamma, \tag{47}$$

если k не является полюсом оператора (7). Поскольку левая часть равенства (47) аналитически зависит от k при $\operatorname{Im} k > \gamma$, то из (47) следует, что оператор $R_k : H^0{}_a \to H^{m-1}$ аналитически зависит от k при $\operatorname{Im} k > \gamma$. Но тогда и оператор (7) не может иметь полюсов при $\operatorname{Im} k > \gamma$.

Из (46) и (47) следует (44). Аналогично доказывается справедливость равенства (45). ■

Асимптотика решений задач (42), (43) будет получена отдельно в случае четномерного и нечетномерного пространства.

Нечетное n. Напомним, что в этом случае оператор $\hat{R}_k$ является мероморфной функцией $k \in \mathbf{C}$. Из теоремы 2 и леммы 6 следует, что в каждой полуплоскости $\operatorname{Im} k > c$ находится не более конечного числа полюсов оператора $\hat{R}_k$. Занумеруем их так, чтобы $\operatorname{Im} k_{j+1} \leqslant \operatorname{Im} k_j$. Тогда $\operatorname{Im} k_j \to -\infty$ при $j \to \infty$, причем эти полюса отходят от вещественной оси по крайней мере логарифмически.

Теорема 4. *Пусть n нечетно, $f \in H^0_a$ и $v \in B^{m-1,\gamma}$ — решение задачи* (42). *Тогда в области Ω_b при любом $N < \infty$ имеет место разложение*

$$v(t, x) = -i \sum_{j=1}^{N} \operatorname*{res}_{k=k_j} [\widehat{R}_k f e^{-ikt}] + w_N(t, x), \tag{48}$$

где при любом $\varepsilon > 0$, любых s, $j = 0, 1, 2, \ldots$, некоторых T_1, $T_2 < \infty$ и $t > T_1 + jT_2$ имеют место оценки

$$\left\| \frac{\partial^j}{\partial t^j} w_N \right\|_{s,(b)} \leqslant C(N, s, j, \varepsilon) e^{(\operatorname{Im} k_{N+1} + \varepsilon)t} \| f \|_{0,a}. \tag{49}$$

Замечание 1. Аналогичное разложение справедливо, если начальные данные в задаче (42) таковы $v_t^{(j)}(0, x) = \varphi_j(x) \in H_a^{m-1-j}$. Мы не рассматриваем подробнее этот случай, поскольку решение такой задачи (а значит, и соответствующее асимптотическое разложение для него) тривиально выражается через решение задачи (42).

Замечание 2. Так как оператор $\widehat{R}_k$ конечно-мероморфно зависит от k, то формулу (48) можно переписать в виде

$$v(t, x) = \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{q=0}^{p_j} t^q u_{q,j}(x) \right) e^{-ik_j t} + w_N(t, x),$$

где $p_j < \infty$ и $u_{q,j} \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Бесконечная дифференцируемость функций $u_{q,j}$ вытекает из того, что $\widehat{R}_k f$ при $k \neq k_j$ удовлетворяет уравнению и граничным условиям задачи (4) с $\varphi = f$.

Замечание 3. Полюсам оператора $\widehat{R}_k$, лежащим в верхней полуплоскости, соответствуют в (48) экспоненциально растущие при $t \to \infty$ слагаемые. Полюсам, лежащим на вещественной оси, отвечают слагаемые вида произведения колеблющейся экспоненты (или единицы, если $k_j = 0$) на многочлен по t, порядок которого меньше порядка полюса. Полюсам, лежащим в нижней полуплоскости, соответствуют экспоненциально убывающие при $t \to \infty$ слагаемые. Согласно теореме 6 гл. IX, оператор $\widehat{R}_k$ имеет полюса в тех и только тех точках k из верхней полуплоскости, в которых однородная задача (4) имеет нетривиальное решение, принадлежащее H^m (точка k является собственным значением); оператор $\widehat{R}_k$ имеет полюса в тех и только тех точках $k \neq 0$ вещественной оси, в которых однородная задача (4) имеет нетривиальное решение с соответствующими условиями излучения на бесконечности. Теорема 8 гл. IX дает достаточные условия, обеспечивающие отсутствие у оператора $\widehat{R}_k$ полюса в точке $k = 0$.

Доказательство теоремы 4. Если решение задачи (42), продолженное нулем при $t < 0$, ограничить на область $R^1 \times \Omega_b$ и рассмотреть как элемент пространства $L_2^\gamma(R^1; H_{(b)}^{m-3})$, то из

леммы 6 получим, что

$$v(t, x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{i\nu-\infty}^{i\nu+\infty}\widehat{R}_k f e^{-ikt}dk, \quad x\in\Omega_b, \tag{50}$$

где интеграл сходится в пространстве $L_2^\nu(R^1; H_{(b)}^{m-3})$, $\nu=\gamma+1$.

Пусть $m>1$. Тогда из оценки (11) следует, что интеграл в (50) при каждом $t>0$ сходится в сильном смысле в пространстве $H_{(b)}^{m-3}$. Перепишем (50) в виде

$$v=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{i\nu-\infty}^{i\nu+\infty}\widehat{R}_k f e^{-ikt}\,dk\in H_{(b)}^{m-3},\ m>1, \tag{51}$$

где через включение в пространство $H_{(b)}^{m-3}$ обозначен тот факт, что интеграл сходится в указанном пространстве в сильном смысле при каждом $t>0$, и равенство имеет место при каждом $t>0$, как равенство элементов из $H_{(b)}^{m-3}$.

Пусть $m=1$. Так как при $t>0$

$$\int\limits_{i\nu-\infty}^{i\nu+\infty}[k-i(\nu+1)]^{-1}e^{-ikt}\,dk=0,$$

то равенство (50) можно переписать в виде

$$v(t, x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{i\nu-\infty}^{i\nu+\infty}(\widehat{R}_k f-i[k-i(\nu+1)]^{-1}f)\,e^{-ikt}\,dk,\ \ x\in\Omega_b, \tag{52}$$

где интеграл сходится в пространстве $L_2^\nu(R^1; H_{(b)}^{-2})$. Из (12) следует, что при $m=1$ интеграл в (52) при каждом $t>0$ сходится в сильном смысле в пространстве $H_{(b)}^{-2}$. Таким образом, при $m=1$ равенство (52) справедливо при каждом $t>0$ как равенство элементов из $H_{(b)}^{-2}$, что обозначается следующим образом:

$$v=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{i\nu-\infty}^{i\nu+\infty}(\widehat{R}_k f-i[k-i(\nu+1)]^{-1}f)\,e^{-ikt}\,dk\in H_{(b)}^{-2}. \tag{53}$$

Для доказательства теоремы 4 продеформируем контур интегрирования в (51), (53) вниз и затем оценим полученный интеграл. Новый контур, который мы обозначим через Γ, изображен на рис. 1 жирной линией. Тонкой линией на этом рисунке изображена граница области $U_{\alpha,\beta}$, определенной неравенством (10), где α и β даются теоремой 2. Обозначим через $l(\delta)$ прямую $\operatorname{Im} k=\operatorname{Im} k_{N+1}+\delta$. Контур Γ состоит из отрезка прямой $l(\delta)$, лежащего вне $U_{\alpha,\beta}$, и части границы $U_{\alpha,\beta}$, находящейся ниже этой прямой. Зафиксируем какое-нибудь δ такое, что $\varepsilon\gg\delta>0$, и на

прямой $l(\delta)$, а также между $l(\delta)$ и $l(0)$, нет полюсов оператора $\widehat{R}_k$. Так как $\operatorname{Im} k_j \to -\infty$ при $j \to \infty$, такое δ существует.

Обозначим, для краткости, через $u(k)$ подынтегральную функцию в (51), если $m > 1$, или — в (53), если $m = 1$. Рассмотрим ее как функцию k со значениями в пространстве $H_{(b)}^{m-3}$. Так как оператор $\widehat{R}_k: H_a^0 \to H_{(b)}^m$ мероморфно зависит от k, то функция $u(k)$ мероморфна. Из теоремы 2 следует, что функция $u(k)$ имеет в $U_{\alpha,\beta}$ оценку

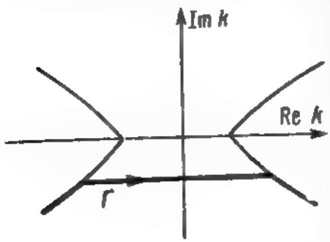

Рис. 1

$$\| u(k) \|_{m-3,(b)} \leqslant C |k|^{-2} e^{T|\operatorname{Im} k| + t \operatorname{Im} k} \| f \|_{0,a}.$$

Это позволяет в интегралах (51), (53) заменить при $t > T$ контур интегрирования на Γ, а разность между соответствующими интегралами по прямой $\operatorname{Im} k = \nu$ и по Γ вычислить с помощью вычетов в полюсах, находящихся между этими контурами. Таким образом, поскольку в $U_{\alpha,\beta}$ нет полюсов оператора $\widehat{R}_k$, то

$$v(t, x) = -i \sum_{\operatorname{Im}(k_j - k_{N+1}) > 0} \operatorname*{res}_{k=k_j} [\widehat{R}_k f e^{-ikt}] + \omega_N(t, x), \quad t > T, \tag{54}$$

где

$$\omega_N = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma u(k)\, dk \in H_{(b)}^{m-3}, \quad t > T. \tag{55}$$

Так как при $t > 0$ интеграл

$$\int_\Gamma [k - i(\nu + 1)]^{-1} e^{-ikt}\, dk$$

абсолютно сходится и равен нулю, то при $t > T$ формулу (55) можно переписать в виде

$$\omega_N = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \widehat{R}_k f e^{-ikt}\, dk \in H_{(b)}^{m-3}. \tag{56}$$

Оператор $\widehat{R}_k$ не имеет полюсов на Γ. Поэтому из оценки (11) следует, что при $k \in \Gamma$

$$\| \widehat{R}_k f \|_{m,(b)} \leqslant C_N (1 + |k|) e^{T|\operatorname{Im} k|} \| f \|_{0,a}.$$

Из последних двух соотношений получаем, что при $t > T + (3 + j)/\alpha$

$$\left\| \frac{\partial^j}{\partial t^j} \omega_N \right\|_{m,(b)} \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \| k^j \widehat{R}_k f e^{-ikt} \|_{m,(b)} |dk| \leqslant$$

$$\leqslant C_N \| f \|_{0,a} \int_\Gamma (1 + |k|)^{1+j} e^{T|\operatorname{Im} k| + t \operatorname{Im} k} |dk| =$$

$$= C_N e^{(|\operatorname{Im} k_N|+1+\varepsilon)t} \| f \|_{0,\alpha} \int\limits_{\Gamma} (1+|k|)^{1+j} e^{T|\operatorname{Im} k|+t(\operatorname{Im} k - \operatorname{Im} k_N + 1 - \varepsilon)} |dk|. \tag{57}$$

Так как $\operatorname{Im} k = -\alpha \ln|\operatorname{Re} k| - \beta$ при $k \in \Gamma$ и $|k|$ достаточно больших, то последний интеграл при $t = T + (3+j)/\alpha$ абсолютно сходится. А так как $\operatorname{Im} k < \operatorname{Im} k_{N+1} + \varepsilon$ при $k \in \Gamma$, то значение этого интеграла при $t > T + (3+j)/\alpha$ не превосходит значения этого же интеграла при $t = T + (3+j)/\alpha$. Таким образом, из (57) следует, что при всех j и $t \geqslant T + (3+j)/\alpha$

$$\left\| \frac{\partial^j}{\partial t^j} \omega_N \right\|_{m,1(b)} \leqslant C(N, j, \varepsilon) e^{(\operatorname{Im} k_N + 1 + \varepsilon)t} \| f \|_{0,\alpha}. \tag{58}$$

Сравнивая формулы (48) и (54), получаем, что

$$w_N(t, x) = \omega_N(t, x) + i \sum_{\substack{\operatorname{Im}(k_j - k_{N+1}) = 0, \\ j < N+1}} \operatorname*{res}_{k=k_j} [\widehat{R}_k f e^{-ikt}].$$

А так как оценки (49) при $s \leqslant m$ получены для функции ω_N, и они, очевидно, имеют место для второго слагаемого в правой части последнего равенства, то отсюда следует, что эти оценки при $s \leqslant m$ справедливы для функции w_N. Для того чтобы получить эти оценки при $s > m$, заметим, что при любом $k \neq k_j$ функция $\widehat{R}_k f \exp(-ikt)$ удовлетворяет при $x \in \Omega_b$ уравнению задачи (42) с правой частью $f \exp(-ikt)$ и граничным условиям этой задачи. Значит, вычеты, стоящие в формуле (48), а следовательно, и функция w_N удовлетворяют уравнению (42) при $x \in \Omega_b$ и граничным условиям задачи (42).

Таким образом,

$$L\left(x, 0, i\frac{\partial}{\partial x}\right) w_N = h,\ x \in \Omega_{b+1};\ \left[B\left(x, i\frac{\partial}{\partial x}\right) w_N\right|_{\Gamma} = 0, \tag{59}$$

где $h = [L(x, 0, i\partial/\partial x) - L(x, i\partial/\partial t, i\partial/\partial x)] w_N$. Мы заменили здесь b на $b+1$, поскольку во всех полученных ранее результатах константу b можно было взять любой. В силу условий A, B задача (59) эллиптична. Оценки (49) при $s > m$ следуют из локальных априорных оценок для эллиптических задач (теорема 6 гл. VI), примененных к задаче (59), и уже полученных оценок для w_N с $s \leqslant m$, в которых тоже можно заменить b на $b+1$. ∎

Теорема 5. *Пусть n — нечетно, $f \in H^0_\alpha$, ω — произвольное комплексное число и $v \in B^{m-1,t}$ — решение задачи* (43). *Тогда в области Ω_b при любом $N < \infty$ имеет место разложение*

$$v(t, x) = \sum_{j=1}^{N} \operatorname*{res}_{k=k_j} \left[\widehat{R}_k \frac{f}{k-\omega} e^{-ikt}\right] +$$

$$+ \chi \operatorname*{res}_{k=\omega} \left[\widehat{R}_k \frac{f}{k-\omega} e^{-ikt}\right] + w_N(t, x),$$

где при любом $\varepsilon>0$, *любых* s, $j=0, 1, 2, \ldots$, *некоторых* $T_1, T_2<\infty$ *и* $t>T_1+jT_2$ *имеют место оценки*

$$\left\| \frac{\partial^j}{\partial t^j} w_N \right\|_{s,(b)} \leqslant C(N, s, j, \varepsilon)\, e^{(\operatorname{Im} k_{N+1}+\varepsilon)t} \|f\|_{0,a}.$$

Здесь $\chi=0$, *если* ω *совпадает с одним из полюсов* k_l *или если* $\operatorname{Im} k_{N+1} \geqslant \operatorname{Im} \omega$. *В противном случае* $\chi=1$.

Следствие. *Пусть в условиях теоремы 5* ω *вещественно и оператор* $\widehat{R}_k$ *не имеет полюсов при* $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ (см. замечание 3 к теореме 4). *Тогда* $v(t,x)=u(x)\exp(-i\omega t)+w(t,x)$, *где* $u=\widehat{R}_\omega f$, *и при любом* $\varepsilon>0$, *любых* s, j *и* $t>T_1+jT_2$

$$\left\| \frac{\partial^j}{\partial t^j} w \right\|_{s,(b)} \leqslant C(s, j, \varepsilon)\, e^{(\operatorname{Im} k_1+\varepsilon)t} \|f\|_{0,a}. \quad (\operatorname{Im} k_1<0).$$

Напомним, что если ω вещественно и $\omega \neq 0$, то функция $u(x)=\widehat{R}_\omega f$ является решением задачи (4) с $k=\omega$ и $\varphi=f$, которое можно получить с помощью условий излучения или принципа предельного поглощения.

Теорема 5 доказывается точно так же, как и теорема 4. Нужно только использовать формулу (45) вместо (44) и, выбирая δ, позаботиться о том, чтобы на $l(\delta)$ и в полосе между $l(0)$ и $l(\delta)$ не было точки ω.

Четное n. В этом случае асимптотика при $t\to\infty$ решений задач (42), (43) зависит не только от полюсов оператора $\widehat{R}_k$, но и от поведения этого оператора около точки $k=0$, которое описывается теоремой 7 гл. IX. Получается эта асимптотика тем же способом, что и в случае нечетного n. Мы будем начинать с формул (44), (45), менять оператор R_k на $\widehat{R}_k$ и опускать контур интегрирования вниз. Обозначим через $\mathbf{C}'$ комплексную плоскость параметра k с разрезом вдоль отрицательной части мнимой оси

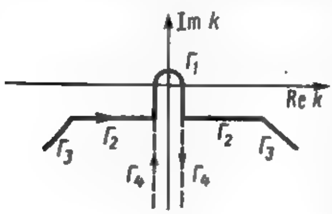

Рис. 2

с условием $-\pi/2<\arg k<3\pi/2$ при $k\in\mathbf{C}'$. Пусть Γ — контур в $\mathbf{C}'$, изображенный на рис. 2 жирной линией. Здесь прямолинейная часть Γ_2 контура Γ идет по прямой $\operatorname{Im} k=-\delta$. Два конца контура Γ_2 находятся непосредственно на берегах разреза в $\mathbf{C}'$ (в точках $k=\delta\exp(-\pi i/2)$ и $k=\delta\exp(3\pi i/2)$), а два других — на границе области $U_{\alpha,\beta}$, определенной соотношением (10), где α и β даются теоремой 2. Часть Γ_3 контура Γ идет по границе области $U_{\alpha,\beta}$, а Γ_1 — какая-то гладкая петля, соединяющая точки $k=\delta\exp(-\pi i/2)$ и $k=\delta\exp(3\pi i/2)$, обходящая разрез в $\mathbf{C}'$ и лежащая в δ-окрестности начала координат. Константу $\delta>0$ возьмем настолько малой, чтобы $\delta<\varepsilon(2\pi)$, где $\varepsilon(2\pi)$ определено в теореме 7 гл. IX, и чтобы в $\mathbf{C}'$ между вещественной осью и прямой $\operatorname{Im} k=-\delta$, а также на этой прямой, не было полюсов опера-

тора $\widehat{R}_k$. Существование такого δ следует из теоремы 2 и теоремы 7 гл. IX.

Лемма 7. *Пусть*

$$u(t) = \int_{\Gamma_1} e^{-ikt} k^p \ln^q k\, dk,$$

где p и q — целые. Тогда для любого целого $M > 0$

$$u(t) = t^{-p-1} \sum_{s=0}^{M} a_s \ln^{q-s} t + u_M(t), \tag{60}$$

где при $t \to \infty$ и любом $j = 0, 1, 2, \ldots$

$$\left| \frac{d^j}{dt^j} u_M(t) \right| < C(M, j) \left| \frac{d^j}{dt^j} [t^{-p-1} \ln^{q-M-1} t] \right|. \tag{61}$$

При этом $a_s = 0$ при всех s, если $p \geq 0$ и $q = 0$. Если $p < 0$, то $a_0 = (2\pi)(-i)^{2q-p}[(-p-1)!]^{-1}$. Если $p \geq 0$ и $q \neq 0$, то $a_0 = 0$, $a_1 = 2\pi q(-i)^{2q+p} p!$

Доказательство. В случае $p \geq 0$, $q = 0$ утверждение леммы 7 очевидно, так как тогда $u(t) \equiv 0$. Пусть $p < 0$ или $q \neq 0$. Обозначим через Γ_4 контур в $\mathbf{C}'$, изображенный на рис. 2 пунктирными линиями. Очевидно, функция

$$v(t) = \int_{\Gamma_4} e^{-ikt} k^p \ln^q k\, dk$$

и все ее производные экспоненциально убывают при $t \to \infty$. Значит, лемму 7 достаточно доказать для функции w:

$$w(t) = \int_{\gamma} e^{-ikt} k^p \ln^q k\, dk,$$

где γ — контур, состоящий из Γ_1 и Γ_4. Но

$$w(t) = t^{-p-1} \int_{\gamma} e^{-ik} k^p [\ln k - \ln t]^q dk =$$

$$= t^{-p-1} \ln^q t \int_{\gamma} e^{-ik} k^p [\varepsilon \ln k - 1]^q dk,$$

где $\varepsilon = \ln^{-1} t$. Последний интеграл и все его производные по ε сходятся равномерно по ε при $|\varepsilon| < 1$. Значит, этот интеграл является бесконечно дифференцируемой функцией ε. Разложив ее в ряд Тейлора по ε, получим (60), (61), а также формулы для a_0, a_1. ■

Лемма 8. *Пусть функция $\omega = \omega(k)$ аналитична при $k \in \{k : k \in \mathbf{C}', |k| < \delta\}$ и имеет там оценку $|\omega(k)| < C|k|^p |\ln k|^q$, где p и q — целые. Тогда при любом $j = 0, 1, 2, \ldots$ и $t \to \infty$*

$$\left| \frac{d^j}{dt^j} \int_{\Gamma_1} e^{-ikt} \omega(k)\, dk \right| < C(j)\, t^{-p-1-j} \ln^q t.$$

Доказательство. Так как производную по t можно внести под знак интеграла, то лемму достаточно доказать только в случае $j=0$.

Напомним, что концы контура Γ_1 расположены в точках $k=\mp i\delta$, находящихся на разных берегах разреза в $\mathbf{C}'$. Заменим Γ_1 на эквивалентный ему контур Γ', состоящий из γ_1, γ_2 и γ_3, где γ_1 — отрезок $[-i\delta, -2i/t]$, находящийся на левом берегу разреза в $\mathbf{C}'$, γ_2 — окружность $|k|=2/t$, $-\pi/2<\arg k<3\pi/2$ с направлением по часовой стрелке на ней и γ_3 — отрезок $[-2i/t, -i\delta]$ на правом берегу разреза в $\mathbf{C}'$. Тогда при $s=1$ и $s=3$

$$\left|\int\limits_{\gamma_s} e^{-ikt}\omega(k)\,dk\right|< C\int\limits_{2/t}^{\infty} e^{-\xi t}\xi^p[1+|\ln\xi|]^q\,d\xi=$$

$$=Ct^{-p-1}\int\limits_{2}^{\infty} e^{-\xi}\xi^p[1+|\ln\xi-\ln t|]^q\,d\xi=$$

$$=Ct^{-p-1}\ln^q t\int\limits_{2}^{\infty} e^{-\xi}\xi^p[\varepsilon+|\varepsilon\ln\xi-1|]^q\,d\xi,$$

где $\varepsilon=\ln^{-1}t$. Ограниченность последнего интеграла следует из оценки $1<\varepsilon+|\varepsilon\ln\xi-1|<2+\ln\xi$ при $0<\varepsilon<1$, $\xi>2$. Это доказывает нужную оценку для интегралов по γ_1 и γ_3. Аналогичная оценка для соответствующего интеграла по γ_2 становится очевидной после замены $kt=k_1$. ■

Напомним, что сейчас n предполагается четным, и в этом случае оператор $\widehat{R}_k$ мероморфно зависит от k на римановой поверхности функции $\ln k$. Как и в случае нечетного n, занумеруем находящиеся в $\mathbf{C}'$ полюсы оператора $\widehat{R}_k$ так, чтобы $\operatorname{Im}k_{j+1}\leqslant\operatorname{Im}k_j$. Теорема 2, лемма 6 и теорема 7 предыдущей главы позволяют сделать это. Получим, что $\operatorname{Im}k_j\to-\infty$ при $j\to\infty$, причем точки k_j отходят от вещественной оси, по крайней мере логарифмически. Рассмотрим разложение оператора $\widehat{R}_k$ в окрестности точки $k=0$ в $\mathbf{C}'$, полученное в теореме 7 предыдущей главы. Очевидно, его можно записать в виде

$$\widehat{R}_k=k^{-A}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}B_{ij}(k\ln^r k)^i\ln^{-j}k,\tag{62}$$

где A, $r\geqslant0$ — целые, $B_{ij}: H_a^0\to H_{(b)}^m$ — ограниченные операторы, все операторы B_{ij}, кроме, может быть, тех, для которых $i\geqslant A$, $j=ir$ — конечномерны, и двойной ряд сходится в операторной норме равномерно при $|\arg k|<2\pi$, $|k|<\varepsilon$ ($\varepsilon=\varepsilon(2\pi)$ определено в теореме 7 гл. IX). Выбросим в разложении (62) члены, у которых $i\geqslant A$, $j=ir$. Оставшуюся сумму обозначим через $\widehat{R}_k'$.

Пусть при $|k|\to 0$, $|\arg k|<2\pi$

$$\widehat{R}'_k = Bk^p \ln^q k + O(|k|^p |\ln k|^{q-1}), \tag{63}$$

где оператор B ненулевой.

Теорема 6. *Пусть n — четное, $f\in H^0_a$ и $v\in B^{m-1,\gamma}$ — решение задачи* (42). *Тогда в области Ω_b справедливо разложение*

$$v(t, x) = -i \sum_{\operatorname{Im} k_j \geqslant 0} \operatorname*{res}_{k=k_j} [\widehat{R}_k f e^{-ikt}] +$$

$$+ (-i)^{2q-p} [(-p-1)!]^{-1} t^{-p-1} \ln^q t\, B_i^t + w_1(t, x),$$

если $p<0$, или

$$v(t, x) = -i \sum_{\operatorname{Im} k_j \geqslant 0} \operatorname*{res}_{k=k_j} [\widehat{R}_k f e^{-ikt}] +$$

$$+ q(-i)^{2q+p} p!\, t^{-p-1} \ln^{q-1} t\, Bf + w_2(t, x),$$

если $p\geqslant 0$. Здесь p, q и B определены в формуле (63) *и при любых s, $j=0, 1, 2, \ldots$, некоторых $T_1, T_2<\infty$ и $t>T_1+jT_2$*

$$\left\| \frac{\partial^j}{\partial t^j} w_\mu \right\|_{s,(b)} \leqslant C(s, j) \left| \frac{d^j}{dt^j} [t^{-p-1} \ln^{q-\mu} t] \right| \| f \|_{0,a}, \quad \mu = 1, 2.$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 4. Точно так же, как в случае нечетного n были получены формулы (54), (55), теперь получаем, что

$$v(t, x) = -i \sum_{\operatorname{Im} k_j \geqslant 0} \operatorname*{res}_{k=k_j} [\widehat{R}_k f e^{-ikt}] + \sum_{s=1}^{3} \omega_s(t, x), \tag{64}$$

где

$$\omega_s(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_s} \widehat{R}_k f e^{-ikt}\, dk. \tag{65}$$

После этого аналогично тому, как для функции (56) была получена оценка (49), получаем, что при $t\geqslant T+(3+j)/a$

$$\left\| \frac{\partial^j}{\partial t^j} (\omega_2 + \omega_3) \right\|_{s,(b)} \leqslant C(s, j) e^{-\delta t} \| f \|_{0,a}. \tag{66}$$

Теорема 6 следует из формул (64), (66) и соответствующей асимптотики для $\omega_1(t, x)$. Нужная асимптотика функции $\omega_1(t, x)$ является следствием формул (65), (62) и лемм 7, 8. ∎

Очевидно, для любого комплексного числа ω оператор $\widehat{R}_{k,\omega} \equiv (k-\omega)^{-1} \widehat{R}_k$ имеет разложение типа (62):

$$\widehat{R}_{k,\omega} = k^{-A'} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} B_{ij}^{\omega} (k \ln^r k)^i \ln^{-j} k.$$

Отбросим в правой части члены, у которых $i > A'$, $j = ir$. Оставшуюся сумму обозначим через $\widehat{R}'_{k,\omega}$. Пусть при $|k| \to 0$

$$\widehat{R}'_{k,\omega} = Dk^p \ln^q k + O(|k|^p |\ln k|^{q-1}). \tag{67}$$

Те же самые соображения, которые позволили нам, опираясь на доказательство теоремы 4, получить теорему 5, позволяют теперь на базе доказательства теоремы 6 получить следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть n — четно, $f \in H^0{}_a$, ω — произвольное комплексное число и $v \in B^{m-1,t}$ — решение задачи* (43). *Тогда в области Ω_b справедливо следующее разложение*:

$$v(t, x) = \sum_{\operatorname{Im} k_j \geqslant 0} \operatorname*{res}_{k=k_j} \left[\widehat{R}_k \frac{f}{k-\omega} e^{-ikt} \right] +$$

$$+ \chi \operatorname*{res}_{k=\omega} \left[\widehat{R}_k \frac{f}{k-\omega} e^{-ikt} \right] + (-i)^{2q-p-1} [(-p-1)!]^{-1} t^{-p-1} \ln^q t\, Df +$$

$$+ w_1(t, x),$$

если $p < 0$, *или*

$$v(t, x) = \sum_{\operatorname{Im} k_j \geqslant 0} \operatorname*{res}_{k=k_j} \left[\widehat{R}_k \frac{f}{k-\omega} e^{-ikt} \right] +$$

$$+ \chi \operatorname*{res}_{k=\omega} \left[\widehat{R}_k \frac{f}{k-\omega} e^{-ikt} \right] + q(-i)^{2q+p-1} p!\, t^{-p-1} \ln^{q-1} t\, Df + w_2(t, x),$$

если $p \geqslant 0$, *где при любых* s, $j = 0, 1, 2, \ldots$, *некоторых* $T_1, T_2 < \infty$ *и* $t \geqslant T_1 + jT_2$

$$\left\| \frac{\partial^j}{\partial t^j} w_\mu \right\|_{s,(b)} \leqslant C(s, j) \left| \frac{d^j}{dt^j} [t^{-p-1} \ln^{q-\mu} t] \right| \|f\|_{0,a}; \ \mu = 1, 2.$$

Здесь p, q и D определены в формуле (67) и $\chi = 0$, если 1) $\operatorname{Im} \omega < 0$, или 2) $\omega = 0$, или 3) $\operatorname{Im} \omega \geqslant 0$, причем ω совпадает с одной из точек k_j. В противном случае $\chi = 1$.

Замечания к теоремам 5—7. 1. К теореме 6 полностью применимо замечание 1, сделанное к теореме 4.

2. Замечания 2 и 3 к теореме 4 естественным образом переносятся на теоремы 5, 6, 7.

3. С помощью теоремы 7 гл. IX можно получить в теоремах 6, 7 следующие члены асимптотики решений задач (42), (43).

4. Очевидным следствием теорем 6, 7 являются следующие утверждения. Если в условиях этих теорем оператор $\widehat{R}_k$ не имеет полюсов в замкнутой верхней полуплоскости и ограничен в некоторой окрестности начала координат в C', то для решения задачи (42) при любых s, j, некоторых $T_1, T_2 < \infty$ и $t > T_1 + jT_2$ имеют место оценки

$$\left\| \frac{\partial^j}{\partial t^j} v \right\|_{s,(b)} \leqslant C(s, j)\, t^{-1-j} \ln^{-2} t \|f\|_{0,a}. \tag{68}$$

При тех же условиях, если $\omega \neq 0$, то решение задачи (43) представимо в виде $v(t, x) = \chi u(x) exp(-i\omega t) + w(t, x)$, где $\chi = 1$ при $\operatorname{Im}\omega \geqslant 0$, $\chi = 0$ при $\operatorname{Im}\omega < 0$, u — та же функция, что и в следствии из теоремы 5, а для $w(t, x)$ при любых s, j, некоторых $T_1, T_2 < \infty$ и $t > T_1 + jT_2$ имеют место оценки

$$\left\| \frac{\partial^j}{\partial t^j} w \right\|_{s,(b)} \leqslant C(s, j)\, t^{-1-j} \ln^{-2} t \, \|f\|_{0,a}.$$

Задачи с ограниченной при $t > 0$ энергией решений. В этом разделе дополнительно к условиям A, B, C', D будет предполагаться, что выполняется

Условие E. Пусть для любого решения $v \in B^{m,\gamma}$ задачи (42) с $f \in C_0^\infty(\Omega)$ справедлива оценка (см. замечание к теоремам 8, 9):

$$\|v\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C(f), \quad t > 0.$$

В этом случае оператор $\widehat{R}_k$ не может иметь полюсов в верхней полуплоскости, а на вещественной оси может иметь полюса не выше первого порядка. Будем считать параметр k в задаче (4) спектральным. Справедливо следующее уточнение теорем 4, 6.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия A, B, C', D, E. Тогда задача* (4) *имеет в полуплоскости* $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ *не более конечного числа собственных значений $k = \omega_j$, $1 \leqslant j \leqslant r$, все они вещественны, соответствующие собственные подпространства $\mathscr{H}_j$ конечномерны, при $\omega_j \neq 0$ собственные функции имеют компактный носитель, принадлежащий $\overline{\Omega}_a$, и существуют такие ограниченные операторы $B_j: H^0{}_a \to \mathscr{H}_j$, что в области Ω_b для решений $v \in B^{m-1,\gamma}$ задачи* (42) *с $f \in H^0{}_a$ справедливо разложение*:

$$v(t, x) = \sum_{j=1}^{r} u_j(x)\, e^{-i\omega_j t} + w(t, x),$$

где $u_j = B_j f \in \mathscr{H}_j$, а для w при любых j, $s = 0, 1, 2, \ldots$, некоторых $T_1, T_2 < \infty$ и любом $t > T_1 + jT_2$ справедлива оценка: если n — нечетно, то при некотором $\delta > 0$

$$\|\partial^j w/\partial t^j\|_{s,(b)} \leqslant C(s, j)\, e^{-\delta t} \|f\|_{0,a},$$

если n — четно, то

$$\|\partial^j w/\partial t^j\|_{s,(b)} \leqslant C(s, j) \left| \frac{d^j}{dt^j} \ln^{-1} t \right| \|f\|_{0,a}.$$

В конце параграфа будут также уточнены при выполнении условия E теоремы 5, 7, относящиеся к принципу предельной амплитуды.

Ниже последовательно будут доказаны следующие четыре утверждения, которые вместе с теоремами 4, 6 доказывают теорему 8.

Лемма 9. *Если выполнены условия A, B, C', D, E, то оператор $\widehat{R}_k$ не имеет полюсов при* $\operatorname{Im} k > 0$, *а на вещественной оси*

имеет полюса не выше первого порядка. В случае четного n, кроме того, $\|\widehat{R}_k\| < C|k|^{-1}$ *при* $|k| \to 0$, $k \in \mathbf{C}'$.

Обозначим через σ_j, $1 \leqslant j \leqslant \nu$, вещественные полюса оператора $\widehat{R}_k$, а через H_j — пространство, натянутое на область значений оператора $\operatorname*{res}_{k=\sigma_j} \widehat{R}_k$. Если в случае четного n разложение (63) начинается с члена Bk^{-1}, то точку $k=0$ также включим в число полюсов $\{\sigma_j\}$, а в качестве соответствующего пространства H_j возьмем область значений оператора B.

Лемма 10. *Если выполнены условия A, B, C′, D, E, то числа σ_j являются собственными значениями задачи* (4), *а пространства H_j состоят из ограничений на область Ω_b собственных функций, отвечающих собственному значению σ_j.*

Лемма 11. *Если выполнены условия A, B и $u=u(x)$ — собственная функция задачи* (4) *с собственным значением $k=\omega\neq 0$,* $\operatorname{Im}\omega=0$, *то $u(x)=0$ при $|x|>a$.*

Лемма 12. *Если выполнены условия A, B, C′, D, E, то задача* (4) *не имеет собственных значений в полуплоскости* $\operatorname{Im} k>0$, *и ограничение на область Ω_b каждой собственной функции с вещественным собственным значением принадлежит одному из пространств H_j.*

Для доказательства лемм 9 и 10 нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 13. *Если на отрезке* $[c, c+1]$

$$f(t) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \cos\mu_j t + \sum_{j=1}^{N} \beta_j \sin\mu_j t, \tag{69}$$

где $N<\infty$ и константы μ_j попарно различны и положительны, то

$$\max_{c\leqslant t\leqslant c+1} |f(t)|^2 \geqslant C\left[\alpha_0^2 + \sum_{j=1}^{N} (\alpha_j^2+\beta_j^2)\right], \tag{70}$$

где C не зависит от c, α_0, α_j, β_j, $1\leqslant j\leqslant N$.

Доказательство леммы 13. Докажем сначала утверждение леммы при $c=0$. Предположив противное, получим последовательность наборов $\Gamma_n=\{\alpha_{0n}, \alpha_{jn}, \beta_{jn}\}$, $n=1, 2, \ldots$, таких, что

$$\alpha_{0n}^2 + \sum_{j=1}^{N} (\alpha_{jn}^2 + \beta_{jn}^2) = 1,$$

а соответствующие этим наборам функции

$$f_n(t) = \alpha_{0n} + \sum_{j=1}^{N} (\alpha_{jn}\cos\mu_j t + \beta_{jn}\sin\mu_j t)$$

стремятся равномерно на отрезке $[0, 1]$ к нулю при $n\to\infty$. Выбрав из последовательности наборов Γ_n сходящуюся подпоследо-

вательность Γ_{n_s} и перейдя в последнем равенстве при $n=n_s$ к пределу при $s\to\infty$, получим

$$0\equiv\widehat{\alpha}_0+\sum_{j=1}^{N}(\widehat{\alpha}_j\cos\mu_j t+\widehat{\beta}_j\sin\mu_j t),\quad \widehat{\alpha}_0^2+\sum_{j=1}^{N}(\widehat{\alpha}_j^2+\widehat{\beta}_j^2)=1,$$

что противоречит линейной независимости функций $\{1, \cos\mu_j t, \sin\mu_j t\}$, $1\leqslant j\leqslant N$. Это доказывает утверждение леммы при $c=0$.

Пусть теперь $f(t)$ имеет вид (69) и $t\in[c, c+1]$. Сделав замену $t-c=t'$, получим для функции $g(t')=f(c+t')$, $0\leqslant t'\leqslant 1$, представление (69) с коэффициентами α_0', α_j', β_j', где $\alpha_0'=\alpha_0$ и

$$\alpha_j'=\alpha_j\cos(\mu_j c)+\beta_j\sin(\mu_j c),\qquad \beta_j'=-\alpha_j\sin(\mu_j c)+\beta_j\cos(\mu_j c).$$

Значит, при указанной замене ни левая, ни правая части неравенства (70) не меняются, и из справедливости оценки (70) при $c=0$ следует ее справедливость с той же самой константой C при любом c. ∎

Доказательство леммы 9. Предположим, что лемма 9 неверна. Обозначим через V ту группу слагаемых в асимптотических формулах для решения задачи (42) (см. теоремы 4, 6), которые имеют максимальный порядок при $t\to\infty$. Пусть $k_j=a_j+i\tau$, $1\leqslant j\leqslant d$, — те из полюсов оператора $\widehat{R}_k$ с максимальным значением $\operatorname{Im} k_j$, порядок которых α максимален. Возможны следующие три ситуации. Первый случай: число n — любое и

$$V=t^{\gamma-1}e^{\tau t}\sum_{j=1}^{d}u_j(x)\,e^{-ia_jt},\tag{71}$$

где $\tau\geqslant 0$, $\gamma=\alpha$ и

$$u_j=\frac{(-i)^\gamma}{(\gamma-1)!}\operatorname*{res}_{k=k_j}[\widehat{R}_k(k-k_j)^{\gamma-1}]f.$$

Второй случай: число n четно, V имеет тот же вид, но $\tau=0$, и в число точек k_j включена точка $k=0$, причем соответствующая функция u_j равна $(-i)^\gamma[(\gamma-1)!]^{-1}Bf$. В этом случае $\gamma=\alpha=-p\geqslant 1$, $q=0$. Здесь и ниже величины p, q, B определены формулой (63). Третий случай: число n четно и

$$V=(-i)^{2q+\gamma}[(\gamma-1)!]^{-1}t^{\gamma-1}(\ln^q t)\,u_1,\tag{72}$$

где $u_1=Bf$, $\gamma=-p\geqslant 1$ и $q>0$ при $\gamma=1$. В первых двух случаях

$$\|v-V\|_{0,(b)}\leqslant C(f)\,t^{\gamma-1}\,e^{\tau t}\ln^{-1}t,\ t\to\infty,\tag{73}$$

а в последнем —

$$\|v-V\|_{0,(b)}\leqslant C(f)\,t^{\gamma-1}\,\ln^{q-1}t,\ t\to\infty.\tag{74}$$

Функцию $f \in C_0^\infty(\Omega_a)$ выберем так, чтобы

$$\alpha_0 \equiv \sum_{j=1}^{d} \|u_j\|^2_{0,(b)} \neq 0. \tag{75}$$

Здесь и ниже $d=1$ в третьем случае.

Из условия E и формул (71)—(74) следует, что либо в формулах (71), (72) $\gamma=1$, $\tau=q=0$, и, значит, лемма 9 справедлива, либо

$$\left\| \sum_{j=1}^{d} u_j e^{-ia_j t} \right\|_{0,(b)} \to 0 \tag{76}$$

при $t\to\infty$. Но

$$\left\| \sum_{j=1}^{d} u_j e^{-ia_j t} \right\|^2_{0,(b)} = \int_{\Omega_b} \Big(\sum_{j=1}^{d} u_j(x) e^{-ia_j t} \Big) \Big(\sum_{j=1}^{d} \overline{u_j}(x) e^{ia_j t} \Big) dx =$$

$$= \alpha_0 + \sum_{j=1}^{d} (\alpha_j \cos \mu_j t + \beta_j \sin \mu_j t), \tag{77}$$

где $\{\mu_j\}$ — это всевозможные разности $|a_k - a_s|$, $k>s$, а α_0 дается формулой (75). Формулы (75)—(77) противоречат лемме 13. Значит, соотношение (76) не может выполняться. ■

Доказательство леммы 10. Из теорем 4, 6 и леммы 9 следует, что при $t\to\infty$

$$\left\| v + i \sum_{j=1}^{\nu} u_j e^{-i\sigma_j t} \right\|_{0,(b)} \leqslant C(f, b) \ln^{-1} t, \tag{78}$$

где

$$u_j = Bf, \tag{79}$$

если n — четно и $\sigma_j=0$, или

$$u_j = \operatorname*{res}_{k=\sigma_j} \widehat{R}_k f \tag{80}$$

в остальных случаях. Из условия E и оценки (78) следует, что для любой $f \in C_0^\infty(\Omega_a)$ и любого $b>0$ существует такое T, что при $t>T$

$$\left\| \sum_{j=1}^{\nu} u_j e^{-i\sigma_j t} \right\|_{0,(b)} \leqslant \frac{1}{2} C(f),$$

где константа $C(f)$ определена в условии E. Но тогда из (75), (77) и леммы 13 получаем, что

$$\sum_{j=1}^{\nu} \|u_j\|_{0,(b)} \leqslant C_1(f),$$

где $C_1(f)$ не зависит от b, т. е. если функции (79), (80), увеличивая b, продолжить на всю область Ω, то они будут принадлежать $L_2(\Omega)$ при любых $f\in C_0^\infty(\Omega)$. Поскольку операторы B и $\operatorname{res}\limits_{k=\sigma_j} \widehat{R}_k$ конечномерны, то это утверждение справедливо при всех $f\in H^0_a$.

Остается показать, что функции из пространств H_j являются решениями однородной задачи (4) при $k=\sigma_j$. Пусть u_j имеет вид (79) или (80) с некоторой $f\in H^0_a$. Тогда, согласно определению оператора $\widehat{R}_k$, функция $\widehat{R}_k f$ при $\operatorname{Im} k>0$ принадлежит $H^m_{(b)}$ и является решением задачи (4) с $\varphi=f$. Умножая равенства (4) на $(k-\sigma_j)$ и переходя к пределу при $k\to\sigma_j$, $\operatorname{Im} k>0$, получаем, что u_j является решением однородной задачи (4). ■

Доказательство леммы 11 содержится внутри доказательства теоремы 3.3 работы [26]. Для полноты изложения приведем его. (Другое доказательство этой леммы имеется в [135].)

Продолжим бесконечно дифференцируемым образом функцию u на все пространство, сохранив за продолженной функцией то же обозначение. Тогда, если $L_0(k, i\partial/\partial x)=L(x, k, i\partial/\partial x)$ при $|x|>a$, то

$$L_0\left(\omega, i\frac{\partial}{\partial x}\right)u=f,\ x\in R^n, \tag{81}$$

где $f\in C_0^\infty(R^n)$ и $f=0$ при $|x|>a$. Пусть $\mathcal{L}$ — матрица, сопряженная к матрице из алгебраических дополнений элементов матрицы L_0, и $H=\det L_0$. Применив к равенству (81) слева оператор $\mathcal{L}(\omega, i\partial/\partial x)$, получим, что компоненты u_l вектора u удовлетворяют уравнению

$$\begin{cases} H\left(\omega, i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u_l=q_l, \\ q_l\in C_0^\infty(R^n),\ q_l=0 \text{ при } |x|>a. \end{cases} \tag{82}$$

Обозначим через $D(a)$ пространство функций из $C_0^\infty(R^n)$, равных нулю при $|x|>a$, а через $Z(a)$ — пространство целых функций $\psi(z)$, $z=\sigma+i\tau\in\mathbf{C}^n$, первого порядка, для которых при любом $\alpha=(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ справедлива оценка $|z^\alpha\psi(z)|\leqslant C_\alpha(\psi)\exp(a|\tau|)$. Преобразование Фурье устанавливает взаимно-однозначное соответствие между этими пространствами. После преобразования Фурье в (82) получаем

$$H(\omega,\ \sigma)\tilde{u}_l(\sigma)=\tilde{q}_l(\sigma)\in Z(a). \tag{83}$$

Пусть $S_k=\{\sigma:\sigma\in R^n,\ H(k, \sigma)=0\}$. Так как многочлен $H(k, \sigma)$ однороден по переменным (k, σ), то $<\sigma, \nabla_\sigma H>=-kH_k'$ при $\sigma\in S_k$. Из гиперболичности $H(i\partial/\partial t, i\partial/\partial x)$ следует, что $H_k'(\omega, \sigma)\neq 0$ при $\sigma\in S_\omega$. Значит, $\nabla_\sigma H(\omega, \sigma)\neq 0$ при $\sigma\in S_\omega$. Но тогда поскольку $\tilde{u}_l\in L_2(R^n)$, то из (83) следует, что $\tilde{q}_l(\sigma)=0$ при $\sigma\in S_\omega$, и значит $\tilde{q}_l(\sigma)=0$ в комплексных нулях многочлена

$H(\omega, \sigma)$, находящихся в некоторой окрестности S_ω. Так как любой из неприводимых сомножителей многочлена $H(\omega, \sigma)$ (по σ) имеет вещественные нули, это приводит к тому, что $\tilde{q}_l(\sigma)$ делится на $H(\omega,\sigma)$, т. е. функция $\tilde{q}_l(z)/H(\omega, z)$ — целая [107]. Но тогда [153] $\tilde{q}_l(z)/H(\omega, z)\in Z(a)$, т. е. $u_l\in D(a)$. ■

Доказательство леммы 12. Утверждения этой леммы достаточно просты, некоторую трудность представляет только утверждение относительно нулевого собственного значения задачи. Пусть u — собственная функция задачи (4) с собственным значением $k=\omega$, $\operatorname{Im}\omega\geqslant 0$. Обозначим через $H(\Gamma)$ прямую сумму пространств $H^{m-m_j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $1<j<ml/2$, где m_j — максимальный порядок операторов в j-й строке матрицы B. Для доказательства леммы достаточно показать, что при некотором $\rho_0>0$ и всех k вида $k=\omega+i\rho$, $0<\rho\leqslant\rho_0$ существуют функции $v_k=v_k(x)$, такие, что $v_k\in H^m=H^m(\Omega)$ и

$$\begin{cases} L\left(x, k, i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)v_k=\rho(f_0+f_k), & x\in\Omega;\\ Bv_k|_\Gamma=\rho(g_0+g_k), \end{cases} \tag{84}$$

где

$$g_0, g_k\in H(\Gamma);\quad f_0, f_k\in H_a^0;\quad \lim_{\rho\to 0}\left[\|g_k\|_{H(\Gamma)}+\|f_k\|_{0,(a)}\right]=0; \tag{85}$$

$$\lim_{\rho\to 0}\|v_k-u\|_{m,(b)}=0. \tag{86}$$

Действительно, поскольку задача (4) эллиптична, то существуют функции w_0 и w_k такие, что

$$\|w_0\|_{m,a}\leqslant C\|g_0\|_{H(\Gamma)};\quad \|w_k\|_{m,a}\leqslant C\|g_k\|_{H(\Gamma)}.$$

и

$$Bw_0|_\Gamma=g_0,\quad Bw_k|_\Gamma=g_k.$$

Тогда функции $u_k=v_k-\rho(w_0+w_k)\in H^m$ будут решениями задачи

$$L\left(x, k, i\frac{\partial}{\partial x}\right)u_k=\rho(h_0+h_k),\ x\in\Omega;\ Bu_k|_\Gamma=0,$$

где

$$h_0, h_k\in H_a^0,\quad \lim_{\rho\to 0}\|h_k\|_{0,a}=0,\quad \lim_{\rho\to 0}\|u_k-u\|_{m,(b)}=0. \tag{87}$$

Значит, $u_k=\rho\hat{R}_k(h_0+h_k)$ при $x\in\Omega_b$, что вместе с оценками (87) и леммой 9 доказывает лемму 12. Остается показать существование функций v_k.

Так как u — собственная функция эллиптической задачи, то $u\in C^\infty(\overline{\Omega})$. Поскольку коэффициенты задачи (4) полиномиально

зависят от k и при вещественных $\omega \neq 0$ в силу леммы 11 $\operatorname{supp} u \subset \subset \overline{\Omega}_a$, то при вещественных $\omega \neq 0$ в качестве функции v_k при $\rho > 0$ можно взять функцию u.

В остальных случаях поступим следующим образом. Обозначим через $L_0(k, i\partial/\partial x)$ матрицу $L(x, k, i\partial/\partial x)$ при $|x| > a$. Функцию u продолжим бесконечно дифференцируемо на все R^n. Сохраним за продолженной функцией то же обозначение. Тогда

$$L_0\left(\omega, i\frac{\partial}{\partial x}\right) u = h \in C_0^\infty(R^n). \tag{88}$$

Обозначим через $R^0{}_k$, $\widehat{R}^0{}_k$ операторы R_k, $\widehat{R}_k$ соответственно в случае $\Omega = R^n$ и $L(x, k, i\partial/\partial x) \equiv L_0(k, i\partial/\partial x)$. В качестве функции v_k возьмем $v_k = R^0{}_k h$, т. е. v_k — это принадлежащее $H^m(R^n)$ решение системы

$$L_0\left(k, i\frac{\partial}{\partial x}\right) v_k = h \in C_0^\infty(R^n), \quad x \in R^n. \tag{89}$$

Пусть $H(k, i\partial/\partial x) = \det L_0(k, i\partial/\partial x)$. В силу условия A система (89) эллиптична. Кроме того, поскольку матрица $L_0(i\partial\,\partial t, i\partial/\partial x)$ гиперболична, то $H(k, \sigma) \neq 0$ при $\operatorname{Im} k > 0$ и $\sigma \in \in R^n$. Тогда при $\operatorname{Im} k > 0$ система (89) имеет, и притом единственное, решение v_k в пространстве $H^m(R^n)$, и это решение как элемент $H^m(R^n)$ аналитически зависит от k. В частности, отсюда и из (88) следует, что если $\operatorname{Im}\omega > 0$, то $v_\omega = u$. Утверждения (84)—(86) при $\operatorname{Im}\omega > 0$ являются очевидным следствием аналитичности v_k, равенств (88), (89) и того, что $v_\omega = u$.

Пусть теперь $\omega = 0$. Покажем, что $v_k \to u$ в пространстве $H^m(R^n)$ при $\rho \to 0$ и оценим скорость этой сходимости. Как уже отмечалось выше, $H(i\rho, \sigma) \neq 0$ при $\rho > 0$ и $\sigma \in R^n$. Из условия A следует, что $H(0, \sigma) \neq 0$ при $\sigma \in R^n$, $\sigma \neq 0$. Отсюда и из однородности многочлена $H(i\rho, \sigma)$ по переменным (ρ, σ) следует, что при $\rho \in R^1$ и $\sigma \in R^n$

$$|H(i\rho, \sigma)| > C(\rho^2 + |\sigma|^2)^{ml/2}, \; C > 0, \tag{90}$$

и, значит, элементы l_{ij} матрицы $[L_0(i\rho, \sigma)]^{-1}$ удовлетворяют неравенству

$$|l_{ij}| < C(\rho^2 + |\sigma|^2)^{-m/2}, \; C > 0. \tag{91}$$

Из (88), (89) получаем, что

$$L_0\left(k, i\frac{\partial}{\partial x}\right)[v_k - u] = \left[L_0\left(0, i\frac{\partial}{\partial x}\right) - L_0\left(k, i\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] u.$$

Сделаем в этом уравнении преобразование Фурье от x к σ и результат умножим слева на матрицу $[L_0(k, \sigma)]^{-1}$. Учитывая (90), получим, что при $k = i\rho$, $\rho > 0$

$$|\tilde{v}_k(\sigma) - \tilde{u}(\sigma)| < C\rho(\rho^2 + |\sigma|^2)^{-1/2} |\tilde{u}(\sigma)|. \tag{92}$$

Здесь и ниже через $|\cdot|$ обозначается не только модуль числа, но и длина вектора в R^l и R^n. Из (88) получаем, что

$$L_0(0,\ \sigma)\widetilde{u}(\sigma)=\widetilde{h}(\sigma). \tag{93}$$

Так как $\widetilde{h}$ — целая функция, то из оценки (90) с $\rho=0$ и (93) следует, что функция $\widetilde{u}$ непрерывна при $\sigma\neq 0$, а в окрестности точки $\sigma=0$ имеет вид

$$\widetilde{u}(\sigma)=a\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right)|\sigma|^{\alpha}+b(\sigma)|\sigma|^{\alpha+1},$$

где α — целое, функция $b=b(\sigma)$ ограничена в окрестности точки $\sigma=0$, функция $a=a(\sigma/|\sigma|)$ непрерывна на единичной сфере, $a(\sigma/|\sigma|)\not\equiv 0$. Поскольку $\widetilde{u}\in L_2$, то $\alpha\geqslant(1-n)/2$, если n — нечетно, и $\alpha\geqslant(2-n)/2$, если n — четно. Значит, при $|\sigma|\to 0$

$$|\widetilde{u}(\sigma)|<C|\sigma|^{(\gamma-n)/2}, \tag{94}$$

где $\gamma=1$ при нечетном n и $\gamma=2$ при четном n. Далее, $h\in C_0^\infty(R^n)$ и, значит, функция $\widetilde{h}$ убывает при $|\sigma|\to\infty$ быстрее $|\sigma|^{-N}$ при любом N. Теперь из (90), (93) и (94) следует, что для любого N и некоторой константы C_N

$$|\widetilde{u}(\sigma)|<C_N|\sigma|^{(\gamma-n)/2}(1+|\sigma|^2)^{-N},\quad \sigma\in R^n.$$

Подставив эту оценку в (92), получим, что при $\sigma\in R^n$

$$|\widetilde{v}_k(\sigma)-\widetilde{u}(\sigma)|<C_N\rho(\rho^2+|\sigma|^2)^{-1/2}|\sigma|^{(\gamma-n)/2}(1+|\sigma|^2)^{-N}. \tag{95}$$

Пусть сначала n — четно. Обозначим через $w=w(\sigma)$ функцию

$$w(\sigma)=\begin{cases}\big||\sigma|^{-n/2}|\ln|\sigma||\big|^{-3/4}, & |\sigma \qquad 2,\\ (1+|\sigma|^2)^{-(n+1)/4}, & |\sigma|>1/2.\end{cases}$$

С помощью оценки (95) легко проверяется, что при $0<\rho<{}^1/_2$

$$|\widetilde{v}_k(\sigma)-\widetilde{u}(\sigma)|(1+|\sigma|^2)^{m/2}\leqslant C\rho|\ln\rho|^{3/4}w(\sigma).$$

А так как $w\in L_2$, то отсюда следует, что

$$\|v_k-u\|_{m,(b)}\leqslant C_1\|v_k-u\|_m\leqslant C_2\rho|\ln\rho|^{3/4}. \tag{96}$$

Для оператора $\widehat{R}^0{}_k$ так же, как и для $\widehat{R}_k$, имеет место формула (62). (При желании в случае $\widehat{R}^0{}_k$ ее можно уточнить.) А так как $v_k=\widehat{R}^0{}_k\ h$ при $x\in\Omega_b$, то из (96) и формулы (62) для оператора $\widehat{R}^0{}_k$ следует существование такой функции $u_1\in H^m{}_{(b)}$, что при $k=i\rho$, $\rho>0$

$$v_k(x)=u(x)+\rho[u_1(x)+u_2(k,\ x)],\quad \lim_{\rho\to 0}\|u_2\|_{m,(b)}=0. \tag{97}$$

Если n — нечетно, через w обозначим функцию

$$w(\sigma)=|\sigma|^{(1-2n)/4}(1+|\sigma|^2)^{-1}.$$

Тогда вместо (96) получим

$$\|v_k - u\|_{m,(b)} \leqslant C\sqrt{\rho}.$$

Поскольку в случае нечетного n оператор $\widehat{R}^0{}_k$ мероморфно зависит от k, то из этой оценки следует (97).

Утверждения (84)—(86) являются очевидным следствием равенств (88), (89) и (97). ∎

Замечание. Как обычно, главной частью ряда Лорана оператор-функции $\widehat{R}_k$ в точке $k=\omega$ назовем совокупность членов ряда Лорана с отрицательными степенями $(k-\omega)$. Аналогично, в случае четного n и $\omega=0$ главной частью разложения (62) для $\widehat{R}_k$ назовем совокупность слагаемых, стремящихся по норме к бесконечности при $k\to 0$.

Обозначим через K пространство, натянутое на область значений операторов, образующих главную часть соответствующего ряда. Согласно теореме 6 гл. IX, если задача (42) удовлетворяет условиям A, B, то оператор $\widehat{R}_k$ имеет полюса в тех и только тех точках $k=k_j$ верхней полуплоскости $\operatorname{Im} k>0$, которые являются собственными значениями задачи (4), и в тех и только тех точках $k=k_j\neq 0$ вещественной оси, в которых однородная задача (4) имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее принципу предельного поглощения (или, что то же самое, удовлетворяющее соответствующим условиям излучения на бесконечности). При этом ограничения на область Ω_b собственных функций при $\operatorname{Im} k_j>0$ и решений, выделяемых принципом предельного поглощения, при $\operatorname{Im} k_j=0$, $k_j\neq 0$, принадлежат соответствующему пространству K, но не исчерпывают, вообще говоря, все это пространство. Например, при $\operatorname{Im} k_j>0$ пространству K принадлежат присоединенные функции. Из леммы 11 вытекает, что если выполнены условия A, B и точка $k=k_j\neq 0$ вещественной оси является собственным значением задачи (4), то $\widehat{R}_k$ имеет в этой точке полюс и ограничение на Ω_b собственной функции принадлежит K_j. Из существования построенных при доказательстве леммы 12 функций v_k вытекает, что если выполнены условия A, B и точка $k=0$ является собственным значением задачи, u — соответствующая собственная функция, то оператор $\widehat{R}_k$ имеет непустую главную часть, отвечающую точке $k=0$, и $u\in K_0$, $x\in\Omega_b$.

Из лемм 9—12 следует не только теорема 8, уточняющая теоремы 4, 6, но и аналогичное уточнение теорем 5, 7 о принципе предельной амплитуды. Пусть, как и раньше, $k=\omega_j$, $1<j<r$, — вещественные собственные значения задачи (4). Тогда в силу лемм 12 и 9 определен оператор $D_j=\lim\limits_{k\to\omega_j}[(k-\omega_j)\widehat{R}_k]$. Справедлива

Теорема 9. *Пусть выполнены условия* A, B, C', D, E, ω — *произвольное комплексное число,* $f\in H^0{}_a$ *и* $v\in B^{m-1,t}$ — *решение задачи* (43). *Тогда в области* Ω_b *справедливо следующее разложение:*

1. *Если ω не совпадает ни с одним из вещественных собственных значений $k=\omega_j$ задачи* (4), *причем либо $\omega\neq 0$, либо n нечетно, то*

$$v(t, x) = \alpha\widehat{R}_\omega f e^{-i\omega t} + \sum_{j=1}^{r} \frac{i}{\omega_j - \omega} u_j(x) e^{-i\omega_j t} + w(t, x),$$

где $\alpha=1$ при $\operatorname{Im}\omega\geqslant 0$, $\alpha=0$ при $\operatorname{Im}\omega<0$, функции u_j — те же, что и в теореме 8, *а для w справедлива оценка, указанная в теореме* 8.

2. *Если $\omega=\omega_j$ при $j=j_0$, причем либо $\omega\neq 0$, либо n — нечетно, то*

$$v(t, x) = [tu_{j_0}(x) + D_{j_0}f]\, e^{-i\omega t} + \sum_{j\neq j_0} \frac{i}{\omega_j - \omega} u_j(x) e^{-i\omega_j t} + w(t, x),$$

где функции u_j — те же, что и в теореме 8, *а для w справедлива оценка, указанная в теореме* 8.

3. *Если $\omega=0$ и n четно, то*

$$v(t, x) = tBf + w(t, x),$$

где $B=0$, если нуль не является собственным значением задачи (4), *и B — оператор, определенный в формуле* (63), *в которой $p=-1$, $q=0$, если нуль является собственным значением задачи* (4). *Для функции w при любых s, $j=0, 1, 2, \ldots$, некоторых T_1, $T_2<\infty$ и любом $t>T_1+jT_2$ справедлива оценка*

$$\|\partial^j w/\partial t^j\|_{s,(b)} \leqslant C(s, j)\left|\frac{d^j}{dt^j}[t\ln^{-1} t]\right| \|f\|_{0,a}.$$

З а м е ч а н и е к т е о р е м а м 8, 9. Доказательства теорем 8, 9 легко переносятся на случай, когда вместо условия E требуется, чтобы оператор $\widehat{R}_k$ при $|k|\to 0$, $k\in\mathbf{C}'$ имел оценку $\|\widehat{R}_k\|<C|k|^{-1}$, а для решений задачи (42) с $f\in C_0^\infty(\Omega)$ при некотором $j\geqslant 0$ была справедлива оценка

$$\left\|\frac{\partial^j v}{\partial t^j}\right\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C(f),\ t>0.$$

Если имеет место лучшая оценка $\|\widehat{R}_k\|$ при $|k|\to 0$, $k\in\mathbf{C}'$, то теоремы 6, 7 позволяют написать в формулировках теорем 8, 9 лучшую оценку функции w в случае четного n.

Литературные указания, дополнения. Имеются четыре разных подхода к изучению вопроса о поведении при $t\to\infty$ решений внешних задач для гиперболических уравнений и систем. Один из них (см. [124, 125, 83, 84, 160, 161, 154]) основан на представлении решения с помощью теоремы о спектральном разложении в виде (осциллирующего) интеграла по спектру соответствующей стационарной задачи. Этот интеграл удается исследовать, если известны свойства (гладкость, оценки) спектральной функции.

К числу недостатков метода относятся обязательность условия симметричности задачи и отсутствие оценки остаточного члена в получаемых асимптотиках.

В работах [165, 139] (см. также [193, 55, 114, 169]) найдены новые оценки типа энергетических, позволяющие выяснить скорость убывания при $t \to \infty$ локальной энергии решений внешней задачи для уравнения второго порядка.

Третий подход к изучению поведения при $t \to \infty$ решений нестационарных задач, предложенный в [68] (см. также [141, 135]), основан на использовании групповых свойств решений и теории рассеяния.

Наконец, четвертый способ опирается на сведение задачи к стационарной с помощью преобразования Фурье по переменной t с последующим исследованием аналитических свойств резольвенты и ее поведения при больших и малых частотах. Этот способ изложен в настоящей главе, основные результаты этой главы получены автором в [34], а литературные указания к обсуждающемуся методу были приведены в предыдущей главе. Отметим, что этот последний способ позволяет получить для внешних задач все результаты, которые следуют из теории рассеяния, и не имеет тех ограничений, которые приходится налагать на задачу при изучении ее с помощью теории рассеяния (например, размерность пространства может быть любой, а не обязательно нечетной). Дальнейшее развитие изложенных в этой главе результатов имеется в работах [179, 177, 171]. Некоторые другие результаты об асимптотике решений волновых задач при $t \to \infty$ содержатся в [191, 164, 33].

Глава XI

КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧАХ РАССЕЯНИЯ

Решением задачи рассеяния плоской волны в неоднородной среде называется функция $\psi=\psi(k, x)$, удовлетворяющая уравнению

$$[\Delta+k^2q(x)]\psi(k, x)=0, \quad x\in R^n, \tag{1}$$

и имеющая вид $\psi(k, x)=\exp(ikx_n)+u(k, x)$, где функция $u(k, x)$ удовлетворяет условиям излучения:

$$u=f(\theta, k)r^{(1-n)/2}e^{ikr}(1+O(r^{-1})), \quad r\to\infty, \quad \theta=x/r.$$

Функция f называется амплитудой рассеяния. Здесь $q\in C^\infty(R^n)$, $q(x)>0$, $q(x)=1$ при $r=|x|>a$. Функция $\exp(ikx_n)$ соответствует плоской волне, идущей вдоль оси x_n, а функция u описывает волну, рассеянную на неоднородностях среды ($u\equiv 0$, если $q\equiv 1$). В этой главе будет получена асимптотика функции ψ при $k\to\infty$, $|x|<b<\infty$ и асимптотика f при $k\to\infty$. Константы a, b считаются фиксированными, и мы не будем следить за зависимостью каких-либо величин от a и b.

В гл. V с помощью канонического оператора В. П. Маслова было получено некоторое формальное асимптотическое решение ψ_N уравнения (1), т. е. такая функция $\psi_N=\psi_N(k, x)$, что

$$[\Delta+k^2q(x)]\psi_N(k, x)=O(k^{-N+n/2}), \quad k\to\infty.$$

В общем случае каустики лагранжева многообразия, отвечающего рассматриваемой задаче, уходят на бесконечность. Поэтому мы не знаем точного поведения функции ψ_N и правой части в предыдущем равенстве при $r\to\infty$. А до тех пор, пока это не выяснено, нет никаких оснований утверждать, что ψ_N близко к интересующему нас конкретному решению ψ уравнения (1), так как уравнение (1) без граничных условий на бесконечности имеет бесконечное множество решений. В гл. V уже говорилось о трудностях в вопросе обоснования асимптотических разложений решений внешних стационарных задач. Главная из них состоит в том, что эти задачи, по существу, двупараметрические: $k\to\infty$ и $r\to\infty$. Предлагаемый в настоящей главе метод, основанный на использовании нестационарных задач и опирающийся на полученные в предыдущей главе оценки решений нестационарных задач

при $t\to\infty$, позволяет, не заботясь о поведении построенных приближений при $r\to\infty$, оценить разность $\psi-\psi_N$ в шаре $|x|<b$ при $k\to\infty$ и доказать, что в этом шаре ψ_N является асимптотикой ψ при $k\to\infty$. Полученные результаты затем применяются для вывода и обоснования квазиклассической асимптотики амплитуды рассеяния.

В § 1 будут указаны асимптотики функций ψ, f и приведены некоторые необходимые в дальнейшем утверждения. В § 2 будут даны все доказательства.

§ 1. Асимптотика решения задачи рассеяния и амплитуды рассеяния

Напомним кратко, как выглядит построенное в гл. V формальное асимптотическое решение ψ_N уравнения (1) в шаре $|x|<b$.

Отвечающие задаче (1) уравнение Гамильтона — Якоби и система Гамильтона имеют соответственно вид

$$|\nabla S|^2-q(x)=0,\quad S|_{x_n=-d}=-d,\quad S'_{x_n}|_{x_n=-d}=1,\quad d\geqslant a; \tag{2}$$

$$\frac{dx}{ds}=2p,\quad \frac{dp}{ds}=\nabla q(x),\ x(0)=y(y_n=-d),\ p(0)=(0,\ldots,0,1). \tag{3}$$

Обозначим через $\Lambda^n\subset R^{2n}_{x,p}$ лагранжево многообразие, образованное бихарактеристиками (фазовыми кривыми) задачи (3). В качестве (глобальных) координат на Λ^n можно взять (y',s), где $y'=(y_1,\ldots,y_{n-1})$. Решая задачу (2), получаем функцию $S=S(x,p)\in C^\infty(\Lambda^n)$:

$$S(x,p)=-d+\int_L\langle p,dx\rangle, \tag{4}$$

где L — отрезок приходящей в точку (x,p) бихарактеристики, заключенный между точкой (x,p) и начальной точкой, для которой $s=0$. (В дальнейшем в аналогичных формулах для S этот отрезок бихарактеристики будем называть просто бихарактеристикой.) Очевидно, $S(x,p)$ не зависит от выбора d при $d>a$.

Всюду ниже предполагается выполненным условие D, сформулированное в предыдущей главе и имеющее применительно к рассматриваемой задаче следующий вид:

Условие D. Для любого $c<\infty$ существует такое T, что при $s>T$ решения системы (3) с начальными условиями $x(0)=y$, $p(0)=p_0$, $|y|<a$, $|p_0|^2=q(y)$ лежат в области $|x|>c$.

Пусть K_{Λ^n} — канонический оператор В. П. Маслова, действующий из пространства $C^\infty(\Lambda^n)$ в $C^\infty(R^n_x)$. Если многообразие Λ^n однозначно проектируется на R^n_x и, значит, $p=p(x)$ на Λ^n,

го для любой функции $\varphi \in C^\infty(\Lambda^n)$ имеем

$$K_{\Lambda^n}[\varphi] = J^{-1/2}\varphi \exp(ikS)|_{p=p(x)}, \quad J = \left|\frac{D(x)}{D(y)}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{D(x)}{D(y', s)}\right|.$$

Напомним определение оператора K_{Λ^n} в общей ситуации. Разобьем множество $\{1, 2, \ldots, n\}$ на два непересекающихся подмножества $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ и $\beta = \{\beta_1, \ldots, \beta_{n-l}\}$. Пусть $|\beta| = n - l$. Через x_α, p_α, x_β, p_β обозначим векторы из соответствующих компонент векторов x и p. Фиксируем локально конечное покрытие Λ^n открытыми на Λ^n ограниченными множествами Ω_j (картами), для которых Ω_j диффеоморфно проектируется на какую-то из координатных лагранжевых плоскостей (x_α, p_β), $\alpha = \alpha(j)$, так что на Ω_j $x_\beta = x_\beta(x_\alpha, p_\beta)$, $p_\alpha = p_\alpha(x_\alpha, p_\beta)$. Обозначим

$$J_j = \frac{1}{2}\left|\frac{D(x_\alpha, p_\beta)}{D(y', s)}\right|, \quad y' = (y_1, \ldots, y_{n-1}). \tag{5}$$

Пусть $\{e_j\}$ — разбиение единицы на Λ^n, подчиненное покрытию $\{\Omega_j\}$: $e_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$, $\Sigma e_j \equiv 1$ на Λ^n, и пусть $g_j \in C^\infty(R^n{}_x)$, $g_j(x) = 1$ в некоторой окрестности проекции $\bar{\Omega}_j$ на $R^n{}_x$, причем любой шар $|x| < c$ пересекается не более чем с конечным числом множеств $\operatorname{supp} g_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots$. Возможность удовлетворить последнему требованию следует из условия D, так как в силу этого условия часть Λ^n, которая при проектировании на $R^n{}_x$ попадает в шар $|x| < c$, компактна.

Будем говорить, что точка $Q \in \Lambda^n$ не особая, если некоторая ее окрестность диффеоморфно проектируется на некоторую область в $R^n{}_x$. Множество особых точек обозначим через $\Sigma(\Lambda^n)$, его проекция на $R^n{}_x$ называется каустикой. Пусть Q_0 — точка на Λ^n с координатами $x = (0, \ldots, 0, -d)$, $p = (0, \ldots, 0, 1)$ и Ω' — одна из областей Ω_j, содержащих Q_0. Через γ_j обозначим индекс В. П. Маслова — индекс цепочки карт, соединяющей Ω' и Ω_j (подробнее см. гл. V). Величина γ_j — это целочисленная константа, которая в случае, когда $\Omega_j \cap \Sigma(\Lambda^n) = \varnothing$, равна индексу пересечения любого пути, соединяющего Q_0 и Ω_j, с $\Sigma(\Lambda^n)$.

Для любой функции $\varphi \in C^\infty(\Lambda^n)$ положим *

$$K_{\Lambda^n}[\varphi] = \\ = \sum_j \left(\frac{k}{-2\pi i}\right)^{\frac{|\beta|}{2}} g_j \int_{\Omega_j} e_j e^{ik[S - \langle x_\beta(x_\alpha, p_\beta), p_\beta\rangle + \langle x_\beta, p_\beta\rangle] - i\frac{\pi}{2}\gamma_j} J_j^{-\frac{1}{2}} \varphi\, dp_\beta. \tag{6}$$

---

* Поскольку якобиан (5) отличается множителем 1/2 от аналогичных якобианов, определенных в гл. V, то оператор (6) отличается множителем $\sqrt{2}$ от соответствующего канонического оператора, определенного в гл. V. В связи с этим ниже при использовании формул гл. V вносятся необходимые изменения. В частности, формальное асимптотическое решение ψ_N уравнения (1) будет теперь даваться каноническим оператором, примененным к функции, которая в $\sqrt{2}$ раз меньше по сравнению с вычисленной в гл. V.

Оператор $K_{\Lambda^n}: C^\infty(\Lambda^n) \to C^\infty(R^n_x)$ зависит (несущественно) от выбора разбиения $\{e_j\}$, функций g_j и координат (x_α, p_β) в Ω_j. В дальнейшем предполагается, что указанные функции и координаты зафиксированы, причем так, что $(x_\alpha, p_\beta) = x$ для карт Ω_j, содержащих хоть одну из начальных точек задачи (3).

Применив оператор $\Delta + k^2 q(x)$ к $K_{\Lambda^n}[\varphi]$, получим (теорема 4 гл. V)

$$[\Delta + k^2 q(x)] K_{\Lambda^n}[\varphi] = K_{\Lambda^n}\Big[\Big(\sum_{j=1}^{N+2} (ik)^{2-j} B_j\Big)\varphi\Big] + \\ + O(k^{-N-1+n/2}), \quad k \to \infty, \tag{7}$$

где B_j — дифференциальные операторы на Λ^n порядка j, причем $B_1\varphi = d\varphi/ds$ — производная в силу системы Гамильтона (3). (Коэффициентом при $(ik)^2$ является оператор B_0 умножения на функцию $q(x) - |\nabla S|^2$, которая равна тождественно нулю в силу выбора S.)

Несколько худшая оценка остатка в формуле (7) по сравнению с утверждением теоремы 4 гл. V вызвана тем, что здесь и ниже все функции оцениваются по максимуму модуля, в то время как в гл. V оценки давались в норме L_2.

Формальное асимптотическое решение уравнения (1) ищется в виде

$$\psi_N(k, x) = K_{\Lambda^n}\Big[\sum_{s=0}^{N} (ik)^{-s} \varphi_s\Big]. \tag{8}$$

Подставим эту функцию в уравнение, воспользуемся формулой (7) и соберем члены при одинаковых степенях k. Приравняв их к нулю, получим рекуррентную систему уравнений переноса для определения функций φ_s:

$$\frac{d}{ds}\varphi_0 = 0, \quad \frac{d}{ds}\varphi_1 = -B_2\varphi_0, \quad \frac{d}{ds}\varphi_2 = -B_2\varphi_1 - B_3\varphi_0, \ \ldots \tag{9}$$

Пусть функции φ_s — решения этой системы с начальными условиями $\varphi_0|_{s=0} = 1$, $\varphi_j|_{s=0} = 0$ при $j > 0$. Тогда в любом шаре $|x| < b$

$$[\Delta + k^2 q(x)]\psi_N(k, x) = O(k^{-N+n/2}).$$

Лучами называются проекции интегральных кривых системы (3) (или бихарактеристик) в R^n_x. Пусть $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — вектор с целочисленными неотрицательными компонентами.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие D. Тогда при любых ν и $|x| < b$*

$$|D^\nu_x[\psi(k, x) - \psi_N(k, x)]| < C(N, \nu)\, k^{-N-1+|\nu|+n/2}, \quad k > 1. \tag{10}$$

В частности, если область $V \subset R^n{}_x$ не содержит каустик, и в каждую ее точку приходит m лучей системы (3), *то равномерно на любом компакте, принадлежащем V,*

$$\psi(k, x) = \sum_{j=1}^{m} J_j^{-1/2}(x)\, e^{ikS_j(x) - i\frac{\pi}{2}\gamma_j} + O(k^{-1}), \qquad (11)$$

где $S_j(x) = -d + \int\limits_{L_j} \langle p, dx\rangle$, L_j — *бихарактеристики задачи* (3), *лучи которых приходят в точку x, $J_j(x) = 2^{-1}|D(x)/D(y', s)|$ — определено в* (5) *и индексы j у функций S_j, J_j и константы γ_j соответствуют той области $\Omega_s \subset \Lambda^n$, в которую приходит бихарактеристика L_j.*

Так как до тех пор, пока луч системы (3) не попадает в область $|x| < a$, решение системы (3) имеет вид

$$x' = y', \ x_n = -d + 2s, \ p = (0, \ldots, 0, 1),$$

то из условия D следует существование такого s_0, что при $s > s_0$ все бихарактеристики системы (3) лежат в области $|x| > a$. А так как $q(x) = 1$ при $|x| > a$, то, решая систему (3) при $|x| > a$, получаем, что при $s > s_0$

$$p = p(y'), \ x = 2p(y')s + \alpha(y'), \ p, \alpha \in C^\infty(R^{n-1}_{y'}). \qquad (12)$$

Далее, из той же системы (3) следует, что $|p|^2 = q(x)$ и, значит, $|p| = 1$ при $|x| > a$.

Обозначим через P отображение $R^{n-1}_{y'}$ на единичную сферу в R^n, задаваемое функцией $p = p(y')$, и через $I(y')$ — модуль якобиана этого отображения:

$$I(y') = \frac{d\sigma_p}{dy'}, \qquad (13)$$

где $d\sigma_p$ — элемент площади сферы $|p| = 1$, заметаемый векторами $p(y')$, когда y' принадлежит элементарному объему dy'. Величина $I(y')$ — это угловая плотность лучей системы (3) на бесконечности. Будем через θ обозначать единичные векторы в R^n, через $\Omega_\varepsilon(\theta)$ обозначим множество векторов θ' единичной сферы, для которых $|\theta' - \theta| < \varepsilon$.

Лемма 1. *Пусть по направлению $\theta = \theta_0$ на бесконечность уходит m лучей системы* (3) *с $y' = y'_{(j)}$, $1 \leqslant j \leqslant m$, причем $I(y'_{(j)}) \neq 0$. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, непересекающиеся окрестности $\omega_j \subset R^{n-1}_{y'}$ точек $y'_{(j)}$ и такое $r_0 < \infty$, что* 1) *отображение $P: \overline{\omega}_j \to \Omega_\varepsilon(\theta_0)$ является гомеоморфизмом и $I(y') \neq 0$ при $y' \in \overline{\omega}_j$;* 2) *по каждому направлению $\theta \in \Omega_\varepsilon(\theta_0)$ на бесконечность уходит ровно m лучей системы* (3); 3) *лучи системы* (3) *при $y' \in \overline{\omega}_j$ и $|x| > r_0$ не содержат точек каустики.*

Будем обозначать через $y'_{(j)}(\theta)$, $\theta \in \Omega_\varepsilon(\theta_0)$, точку $y' \in \omega_j$, для которой $p(y') = \theta$, и через $I_j(\theta)$ — величину $I(y'_{(j)}(\theta))$. Пусть

$$F_j(y', s, \theta) = S(x, p) - \langle\theta, x\rangle, \ y' \in \omega_j,$$

где (x, p) определяются из системы (3), т. е. при $s > s_0$ функции x и p имеют вид (12). Пусть при $\theta \in \Omega_\varepsilon(\theta_0)$

$$F_j(\theta) = F_j(y'_{(j)}(\theta), s, \theta)\big|_{s>s_0}. \tag{14}$$

Тот факт, что последняя функция не зависит от s, легко следует из (4) и (12).

Теорема 2. *Пусть выполнено условие D и условие леммы 1. Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$, $\theta \in \Omega_\varepsilon(\theta_0)$ и $k \to \infty$*

$$f(\theta, k) = \sum_{j=1}^{m} I_j^{-1/2}(\theta)\, e^{ikF_j(\theta) - i\frac{\pi}{2}\gamma_j} + O(k^{-1}), \tag{15}$$

где γ_j — индекс пересечения бихарактеристики системы (3), *для которой $y' = y'_{(j)}(\theta_0)$, с $\Sigma(\Lambda^n)$, и остаточный член оценивается равномерно по θ при $\theta \in \Omega_\varepsilon(\theta_0)$.*

При желании в ходе доказательства теоремы 2 можно получить следующие члены в асимптотическом разложении функции f.

Доказательства теорем 1, 2 опираются на полученные в предыдущей главе оценки при $t \to \infty$ для локальной энергии решений нестационарных задач с начальными данными, имеющими компактный носитель. В применении к нашей задаче получаем следующий результат. Пусть

$$Lw(t, x) \equiv \left[q(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right] w(t, x) = 0,\ t > 0,$$

$$w(0, x) = 0, \quad w'_t(0, x) = f(x). \tag{16}$$

Теорема 3. *Пусть выполнено условие D и $f(x) = 0$ при $|x| > a$. Тогда существуют такие T_1, T_2, что решение задачи* (16) *при $|x| < b$, любых α, j и $t > T_1 + jT_2$ имеет оценки*

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial t^j} D_x^\alpha w\right| \leqslant C(\alpha, j)\, t^{-j-1} \|f\|_{L_2(R^n)},$$

где t^{-j-1} можно заменить на $\exp(-\delta t)$ с некоторым $\delta > 0$, если n нечетно (или на t^{-j-n+1}, если $n > 2$).

Доказательство. Обозначим через $\widehat{R}^0{}_k$ оператор $\widehat{R}_k$, отвечающий задаче (16) в случае $q(x) \equiv 1$. Очевидно,

$$\widehat{R}_k = \widehat{R}_k^0 + k^2 \widehat{R}_k^0 (1 - q) \widehat{R}_k.$$

А так как $\|\widehat{R}^0{}_k\| \leqslant C|\ln k|$ при $|k| \to 0$, $k \in \mathbf{C}^1$, то из последнего равенства следует, что

$$\|\widehat{R}_k\| \leqslant C|\ln k| + C_1|k^2 \ln k|\, \|\widehat{R}_k\|,\ |k| \to 0,\ k \in \mathbf{C}^1.$$

Значит,

$$\|\widehat{R}_k\| < C|\ln k|,\ |k| \to 0,\ k \in \mathbf{C}^1. \tag{17}$$

Эта оценка вместе с законом сохранения энергии для решений задачи (16) и замечанием к теоремам 8, 9 гл. X позволяет применить к оператору $\widehat{R}_k$ леммы 9—11 гл. X. В частности, из леммы 9 следует, что оператор $\widehat{R}_k$ не имеет полюсов при $\operatorname{Im} k>0$, а из лемм 10, 11 и единственности решения задачи Коши для оператора $\Delta+q(x)k^2$ вытекает, что $\widehat{R}_k$ не имеет полюсов при вещественных $k\neq 0$. Поэтому теорема 3 является следствием теорем 4, 6 гл. X, оценки (17) и теорем вложения Соболева, позволяющих оценить максимум производных от функции w через норму функции в пространствах H^s. ■

§ 2. Доказательства теорем 1 и 2

Рассмотрим нестационарную задачу, описывающую падение плоской волны:

$$\begin{cases} Lv\equiv \left[q(x)\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right]v(t, x)=0,\ t>0, \\ v(0, x)=e^{ikx_n}\chi\big|_{t=0},\ v_t'(0, x)=e^{ikx_n}(-ik\chi-\chi')\big|_{t=0}, \end{cases} \tag{18}$$

где $\chi=\chi(x_n-t+a)$, $\chi\in C^\infty(R^1)$, $\chi(\tau)=0$ при $\tau>-1$, $\chi(\tau)=1$ при $\tau<-2$. Пусть $\varphi\in C^\infty{}_0(R^1)$, $\varphi(\tau)=0$ при $\tau<0$ и $\tau>1$ и интеграл от φ равен единице. Начальные данные в задаче (13) соответствуют решению уравнения (13), определенному при всех $t\in R^1$ и равному $\chi(x_n-t-a)e^{ik(x_n-t)}$ при $t<0$.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие D. Тогда*

$$v=\psi(k, x)e^{-ikt}+v_1,$$

где при некоторых T', T'', любых N и α, $|x|<b$ и $T>T'+NT''$

$$\left|D_x^\alpha\int_0^\infty v_1 e^{ikt}\varphi(t-T)\,dt\right|<C(N, \alpha)k^{-N},\ k>1. \tag{19}$$

Доказательство. Положим $v=\chi(x_n-t+a)\exp[ik(x_n-t)]+\omega$. Тогда $\omega=\omega_1+\omega_2$, где

$$L\omega_i=f_i,\ t>0;\ \omega_i(0, x)=\omega_{i_t}'(0, x)=0;$$

$$f_1=[1-q(x)]\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{e^{ik(x_n-t)}[\chi(x_n-t+a)-1]\},$$

$$f_2=k^2[q(x)-1]e^{ik(x_n-t)}.$$

Так как $f_1=0$ при $|x|>a$ и при $t>2(a+1)$, то из теоремы 3 и принципа Дюамеля следует, что при $|x|<b$, некоторых T_1, T_2 и $t>T_1+jT_2$

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial t^j}D_x^\alpha\omega_1\right|<C(\alpha, j)k^2.$$

Но тогда, интегрируя по частям, получаем для ω_1 оценку (19). Далее, если w — решение задачи (16) с $f(x)=k^2\frac{q(x)-1}{q(x)}e^{ikx_n}$, то

$$\omega_2=e^{-ikt}\int_0^t w(\tau,x)e^{ik\tau}d\tau=e^{-ikt}\lim_{k_1\to k+i0}\int_0^t w(\tau,x)e^{ik_1\tau}d\tau. \quad (20)$$

При $\operatorname{Im}k_1>0$ функция $u(k_1,x)=\int_0^\infty w(\tau,x)e^{ik_1\tau}d\tau$ принадлежит $L_2(R^n)$ и является решением уравнения

$$[\Delta+q(x)k_1^2]u=k^2[q(x)-1]e^{ikx_n}.$$

Но тогда из принципа предельного поглощения и (20) получаем

$$\omega_2=e^{-ikt}u(k,x)+e^{-ikt}\lim_{k_1\to k+i0}\int_t^\infty w(\tau,x)e^{ik_1\tau}d\tau=$$

$$=e^{-ikt}u(k,x)+\sum_{s=0}^{N+1}\frac{w_t^{(s)}(t,x)}{(-ik)^{s+1}}-e^{-ikt}\int_t^\infty\frac{w_t^{(N+2)}(\tau,x)}{(-ik)^{N+2}}e^{ik\tau}d\tau.$$

Теперь из теоремы 3 следует, что $\widehat{\omega}\equiv\omega_2-u(k,x)\exp(-ikt)$ обладает оценками (19). А так как при $|x|<b$, $t>b+a+2$

$$v=e^{ik(x_n-t)}+\omega=e^{-ikt}\psi(k,x)+\widehat{\omega}+\omega_1,$$

то это вместе с полученными выше оценками для ω_1 доказывает утверждение теоремы 4. ■

Замечания. 1. Так же, как и теорему 4, можно доказать аналогичное утверждение для внешних задач.

2. Теорема 4 сводит отыскание асимптотики $\psi(k,x)$ к решенной задаче об отыскании асимптотики решения в ограниченной области соответствующей нестационарной задачи (18). Мы воспользуемся этим для доказательства теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Напомним, как строится асимптотика решения задачи (18).

Выпишем отвечающие задаче (18) уравнение Гамильтона—Якоби и систему Гамильтона:

$$-(\widehat{S}_t')^2q(x)+|\nabla\widehat{S}|^2=0\ (\nabla=\nabla_x);\ \widehat{S}|_{t=0}=x_n,\ \widehat{S}_t'|_{t=0}=\frac{-1}{\sqrt{q(x)}}, \quad (21)$$

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{ds}=2p,\quad \dfrac{dt}{ds}=-2\lambda q(x),\quad \dfrac{dp}{ds}=\lambda^2\nabla q(x),\quad \dfrac{d\lambda}{ds}=0;\\[2ex] x(0)=y,\ t(0)=0,\ p(0)=(0,\ \ldots,0,1),\ \lambda(0)=\dfrac{-1}{\sqrt{q(y)}}.\end{cases} \quad (22)$$

Через Λ^{n+1} обозначим лагранжево многообразие, образованное фазовыми кривыми задачи (22), через $\widehat{S}=\widehat{S}(t,x,\lambda,p)\in$

$\in C^\infty(\Lambda^{n+1})$ — решение задачи (21):

$$S(t, x, \lambda, p) = y_n, \tag{23}$$

где y определяет фазовую кривую системы (22), приходящую в точку $(t, x, \lambda, p) \in \Lambda^{n+1}$. Пусть $K_{\Lambda^{n+1}}: C^\infty(\Lambda^{n+1}) \to C^\infty(R^{n+1}_{t,x})$ — канонический оператор, который строится по Λ^{n+1} точно так же, как выше строился K_{Λ^n} по многообразию Λ^n. Тогда (см. гл. V или [78]) существуют такие $g_s = g_s(t, x, \lambda, p)$, $g_s \in C^\infty(\Lambda^{n+1})$, что разность между решением $v(t, x)$ задачи (18) и функцией

$$v_N(t, x) = K_{\Lambda^{n+1}}\left[\sum_{s=0}^{N} (ik)^{-s} g_s\right]$$

при любых N, α, j, $T < \infty$, $|x| < b$, $t < T$ и $k > 1$ имеет оценки:

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial t^j} D^\alpha_{|x}(v - v_N)\right| \leqslant C(N, \alpha, j, T)\, k^{-N-1+|\alpha|+j+n/2}. \tag{24}$$

Функции g_s определяются из соответствующих уравнений переноса.

Лемма 2. *Сдвиг $t \to t + \tau$, $\tau > 0$, переводит решения системы (22) с $x(0) = y$, $y_n \leqslant -a$ в решения с $x(0) = y - (0, \ldots, 0, \tau)$, а проектирование $(t, x, \lambda, p) \to (x, p)$ переводит их в решения системы (3) с $x(0) = y$. При этом в соответствующих точках Λ^{n+1} и Λ^n с $y_n \leqslant -a$ имеет место равенство $\widehat{S}(t, x, \lambda, p) = S(x, p) - t$ и равны якобианы*:

$$\left|\frac{D(t, x_\alpha, p_\beta)}{D(y, s)}\right| = \left|\frac{D(x_\alpha, p_\beta)}{D(y', s)}\right|. \tag{25}$$

Действительно, первое утверждение леммы проверяется непосредственно. Далее, пусть $\widehat{L}$ — фазовая кривая задачи (22) с $y_n \leqslant -a$, приходящая в точку (t, x, λ, p), и L — ее проекция в $R^{2n}_{x,p}$, т. е. соответствующая бихарактеристика задачи (3). Тогда из (3) следует, что $\langle p, dx \rangle = 2|p|^2 ds = 2q(x)ds$ и, значит,

$$S(x, p) = y_n + \int_L \langle p, dx \rangle = y_n + 2\int_L q(x)\, ds =$$

$$= y_n + 2\int_{\widehat{L}} q(x)\, ds = y_n + t = \widehat{S}(t, x, \lambda, p) + t.$$

Предпоследнее равенство следует непосредственно из (22), последнее — из (23).

Докажем справедливость равенства (25). Нетрудно проверить непосредственно на основе (3), (22), что если изменить начальные данные, уменьшив y_n на $\tau > 0$, и вычислить решения в точке $s = \tau/2$, то при $y_n \leqslant -a$ решения изменятся следующим образом: x и p не изменятся, а t увеличится на τ, т. е. при $y_n \leqslant -a$ и $s > 0$ решения систем (3), (22) следующим образом зависят от аргу-

ментов y_n, s: x и p зависят только от y_n+2s, а t есть сумма $2s$ и функции от y_n+2s. Поэтому, если в матрице $\partial(t, x_\alpha, p_\beta)/\partial(y, s)$ из предпоследнего столбца вычесть последний, умноженный на 1/2, и затем раскрыть определитель получившейся матрицы по элементам предпоследнего столбца, то мы получим равенство (25). Лемма 2 доказана. ■

Оператор $K_{\Lambda^{n+1}}$ мы построим так, чтобы на функциях $\varphi \in C_0^\infty(\Lambda^{n+1})$, равных нулю вне Λ_1^{n+1}, иметь

$$K_{\Lambda^{n+1}}[\varphi] = e^{-ikt} K_{\Lambda^n}[\varphi(t)], \tag{26}$$

где $\Lambda_c^{n+1} \subset \Lambda^{n+1}$ — многообразие, образованное фазовыми кривыми задачи (22) с $y_n < -a-c$, а $\varphi(t) \in C^\infty(\Lambda^n)$ — значение функции φ при фиксированном t, перенесенное с помощью леммы 2 с Λ_1^{n+1} на соответствующую часть Λ^n и продолженное нулем на все Λ^n. Для этого следующим образом выберем функции $\hat{e}_j$, $\hat{g}_j$, с помощью которых строится оператор $K_{\Lambda^{n+1}}$, аналогичные функциям e_j, g_j в формуле (9), по которым строился оператор K_{Λ^n}. Пусть $f=f(y_n)$, $f \in C^\infty(R^1)$, $f(y_n)=0$ при $y_n > -a-1/3$, $f(y_n)=1$ при $y_n < -a-2/3$. Разбиение единицы $\Sigma\hat{e}_j \equiv 1$ на Λ^{n+1} построим следующим образом. Пусть $\{f_j\}$ — какое-то разбиение единицы на $\Lambda^{n+1} \setminus \Lambda^{n+1}{}_1$ такое, что $\operatorname{supp} f_j$ однозначно проектируется на одну из координатных лагранжевых плоскостей. Тогда в качестве набора $\{\hat{e}_j\}$ возьмем все функции $\{(1-f)f_j\}$ и функции $\{fe_j\}$, где $\{e_j\}$ — разбиение единицы на Λ^n, по которому строился оператор K_{Λ^n}. При этом в качестве локальных координат в карте, отвечающей функции fe_j, будем брать (t, x_α, p_β), где (x_α, p_β) — координаты лагранжевой плоскости, отвечающей карте $\Omega_j \subset \Lambda^n$. Для тех же карт положим $\hat{g}_j = g_j$. Из леммы 2 следует возможность указанного построения оператора $K_{\Lambda^{n+1}}$ и справедливость равенства (26).

Аналогично формуле (7) имеем

$$\left[\Delta - q(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] K_{\Lambda^{n+1}}[\varphi] = K_{\Lambda^{n+1}}\left[\left(\sum_{j=1}^{N+2}(ik)^{2-j}\hat{B}_j\right)\varphi\right] + $$

$$+ O(k^{-N-1+n/2}).$$

Уравнения переноса, из которых определяются функции $g_s = g_s(t, x, \lambda, p)$, имеют вид (9) с заменой B_j на $\hat{B}_j$, и в силу равенств (7), (9), (26) в точках Λ_1^{n+1} им удовлетворяют функции $\varphi_s(x, p)$, которые были определены при построении $\psi_N(k, x)$. Так как функции g_j удовлетворяют начальным условиям

$$g_0|_{s=0} = \chi(y_n + a), \quad g_j|_{s=0} = 0, \ j > 0,$$

и эти условия при $y_n > -a-2$ совпадают с начальными условиями для функций φ_j, $j \geqslant 0$, то $g_j = \varphi_j$ на Λ_2^{n+1}. Из тех же начальных условий для функций g_j и уравнений переноса следует, что $g_j = 0$, $j \geqslant 0$, вне Λ_1^{n+1}. Таким образом, в силу (26)

$$v_N = K_{\Lambda^{n+1}}\left[\sum_{s=0}^{N} (ik)^{-s} g_s\right] = e^{-ikt} K_{\Lambda^n}\left[\sum_{s=0}^{N} (ik)^{-s} g_s(t)\right].$$

В силу условия D при любом b и достаточно большом $T_0 = T(b)$ проекция $\Lambda^{n+1} \diagdown \Lambda_2^{n+1}$ в $R_{t,x}^{n+1}$ не пересекается с полуцилиндром $|x| \leqslant b+1$, $t \geqslant T_0$. Значит, если $t \geqslant T_0$, то $g_j(t) = \varphi_j$ в точках Λ^n, для которых $|x| \leqslant b+1$. А так как $K_{\Lambda^n}[\varphi] = O(k^{-\infty})$ на любом компакте в $R^n{}_x$, не пересекающемся с проекцией $\operatorname{supp}\varphi$ в $R^n{}_x$, то из последнего равенства следует, что при любом T_1, $|x| \leqslant b$ и $T_0 < t < T_1$

$$v_N(t, x) = e^{-ikt}\psi_N(k, x) + O(k^{-\infty}). \tag{27}$$

Это вместе с теоремой 4 и оценкой (24) доказывает справедливость оценки (10). Равенство (11) является очевидным следствием (10). ∎

Замечание. Из оценок (24), (27) и теоремы 1 следует, что при некотором $T = T(b, N + |\alpha| + j)$ и любом $T_1 \geqslant T$ функция v_1, определенная в теореме 4, имеет в области $|x| \leqslant b$, $T \leqslant t \leqslant T_1$ оценки

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial t^j} D_x^\alpha v_1\right| \leqslant C(N, \alpha, j, T_1) k^{-N}, \quad k > 1.$$

Доказательство леммы 1. Первое утверждение леммы есть очевидное следствие теоремы о неявной функции. Таким образом, при любом $\theta \in \Omega_\varepsilon(\theta_0)$ существует ровно по одной точке y' в каждой из окрестностей ω_j, для которых луч системы (3) уходит на бесконечность по направлению θ. Уменьшив, если это необходимо, ε, можно добиться того, чтобы других лучей системы (3), уходящих на бесконечность по направлению θ, не было. Действительно, предположив противное, получаем последовательность точек $y' = z'(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, не принадлежащих ни одной из окрестностей ω_j и таких, что отвечающие им лучи системы (3) уходят на бесконечность по направлению $\theta = \theta_n$, причем $\theta_n \to \theta_0$ при $n \to \infty$. При $|y'| > a$ лучами системы (3) являются прямые $x' = y'$, и для них $\theta = (0, \ldots, 0, 1)$. Так как это направление не может совпадать с θ_0 (по направлению θ_0 идет только конечное число лучей), то $|z'(n)| \leqslant a$ при достаточно большом n. Но тогда $\{z'(n)\}$ имеет предельную точку $y' = \hat{y}'$, причем $\hat{y}'$ не совпадает ни с одним из $y'_{(j)}$, так как точки $z'(n)$ лежат вне ω_j. В силу непрерывности $\theta(y')$ луч системы (3) с $y' = \hat{y}'$ уходит на бесконечность по направлению θ_0, что противоречит условиям леммы

Для доказательства леммы 1 остается показать, что в некоторой окрестности бесконечности лучи системы (3) с $y' \in \overline{\omega}_j$ не со-

держат каустических точек. Обозначим через $\hat{J}_j$ величину (5):

$$\hat{J}_j = \frac{1}{2}\left|\frac{\overline{D(x)}}{D(y', s)}\right|, \quad y' \in \bar{\omega}_j, \tag{28}$$

где x имеет вид (12), а знак над якобианом указывает на то, что в качестве координатной лагранжевой плоскости в данном случае берется $R^n{}_x$. Пусть $z = 2p(y')s$. Тогда, очевидно, при $s \to \infty$

$$\hat{J}_j = \frac{1}{2}\left|\frac{D(z)}{D(y', s)}\right|(1 + O(s^{-1})) = \frac{1}{2}\ \frac{dz}{dy'\,ds}(1 + O(s^{-1})).$$

А так как $dz = (2s)^{n-1} d\sigma_p d|z| = 2(2s)^{n-1} d\sigma_p ds$, то из последнего равенства и (13) получаем, что при $s \to \infty$

$$\hat{J}_j = I(y')\,(2s)^{n-1}(1 + O(s^{-1})), \quad y' \in \bar{\omega}_j, \tag{29}$$

откуда следует последнее утверждение леммы. ■

Доказательство теоремы 2. Пусть ψ — решение задачи рассеяния, так что функция $u = \psi - \exp(ikx_n)$ удовлетворяет условиям излучения на бесконечности и уравнению

$$(\Delta + k^2) u = 0, \quad |x| > a.$$

Пусть $G = G(k, x)$ — удовлетворяющее условиям излучения на бесконечности фундаментальное решение оператора Гельмгольца:

$$G(k, x) = -\frac{i}{4}\left(\frac{k}{2\pi r}\right)^{(n-2)/2} H^{(1)}_{(n-2)/2}(kr),$$

где $H^{(1)}_{(n-2)/2}$ — функция Ханкеля первого рода. Из формулы Грина для функций $G(k, x-y)$ и u при $|y| > R > a$ получаем

$$u(y) = \int\limits_{r=R}\left(G\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial G}{\partial r}\right) dS, \tag{30}$$

где $G = G(k, x-y)$, $r = |x|$, dS — элемент площади поверхности сферы $r = R$. Пусть $y/|y| = \theta$. При фиксированном x и $y \to \infty$

$$G(k, x-y) = \beta_n e^{-ik\langle\theta, x\rangle} |y|^{(1-n)/2} e^{ik|y|}(1 + O(|y|^{-1})),$$

$$\frac{\partial G}{\partial r}(k, x-y) =$$

$$= -ik\beta_n\left\langle\theta, \frac{x}{r}\right\rangle e^{-ik\langle\theta, x\rangle} |y|^{(1-n)/2} e^{ik|y|}(1 + O(|y|^{-1})),$$

где

$$\beta_n = \beta_n(k) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{k}{2\pi i}\right)^{(n-3)/2}. \tag{31}$$

Подставляя эти выражения в (30), получаем

$$f(\theta, k) = \beta_n \int\limits_{r=R}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + ik\left\langle\theta, \frac{x}{r}\right\rangle u\right] e^{-ik\langle\theta, x\rangle} dS.$$

Пусть $h = h(r)$,

$$h \in C_0^\infty([R, R+1]), \quad \int_R^{R+1} h(r)\,dr = 1.$$

Тогда так как $f(\theta, k)$ не зависит от R, то

$$f(\theta, k) = \beta_n \int\limits_{R<r<R+1} h(r)\left[\frac{\partial u}{\partial r} + ik\left\langle\theta, \frac{x}{r}\right\rangle u\right] e^{-ik<\theta, x>}\,dx. \tag{32}$$

Как уже отмечалось при доказательстве леммы 1, $\theta_0 \neq (0, \ldots, 0, 1)$. Значит, при достаточно малом $|\theta - \theta_0|$ фаза $x_n - <\theta, x>$ не имеет стационарных точек, и интеграл (32), если в нем заменить функцию u на $\exp(ikx_n)$, будет иметь порядок $O(k^{-\infty})$ при $k \to \infty$. Таким образом, полагая в (32) $u = \psi - \exp(ikx_n)$, получаем

$$f(\theta, k) = \beta_n \int\limits_{R<r<R+1} h(r)\left[\frac{\partial \psi}{\partial r} + ik\left\langle\theta, \frac{x}{r}\right\rangle \psi\right] e^{-ik<\theta, x>}\,dx + O(k^{-\infty}).$$

Теперь из теоремы 1 следует, что

$$f(\theta, k) = \beta_n \int\limits_{R<r<R+1} h(r)\left[\frac{\partial \psi_N}{\partial r} + ik\left\langle\theta, \frac{x}{r}\right\rangle \psi_N\right] e^{-ik<\theta, x>}\,dx + O(k^{-N+n-5/2}), \quad k \to \infty, \tag{33}$$

где функция ψ_N имеет вид (8), функции φ_s определяются из уравнений переноса, а оператор K_{Λ^n} дается формулой (6).

Таким образом, функция $f(\theta, k)$ представляется в виде конечной суммы интегралов вида

$$k^{(|\beta|+n-1)/2-s} \int\limits_{Q_j} \tilde{f}_{j,s}(x, p_\beta)\, e^{ik[G_j(x, p_\beta) - <\theta, x>] - i\frac{\pi}{2}\gamma_j}\, dp_\beta\, dx,$$

где Q_j — область в пространстве $R^{n+|\beta|}_{x, p_\beta}$, определяемая условиями: $(x, p) \in \Omega_j$, $R < r < R+1$, $\tilde{f}_{j,s} \in C^\infty_0(Q_j)$, функция $ikG_j - i\pi\gamma_j/2$ совпадает с фазовой функцией в интеграле (6); $0 \leqslant s \leqslant N+1$.

До сих пор мы не накладывали никаких ограничений на выбор покрытия $\{\Omega_j\}$ многообразия Λ^n, лишь бы $\overline{\Omega}_j$ однозначно проектировалось на одну из координатных лагранжевых плоскостей. Сейчас мы выберем это покрытие специальным образом. Пусть Ω_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, — области на Λ^n, определяемые условиями $y' \in \omega_j$, $|x| > r_0$, где ω_j и r_0 определены в лемме 1. Пусть ω'_j — подобласть ω_j такая, что $P\omega'_j = \Omega_{\varepsilon/2}(\theta_0)$. Покрытие $\{\Omega_j\}$ на Λ^n выберем так, чтобы первые m областей были указанного вида, а остальные области Ω_j не пересекались ни с одной из областей $\Omega'_j = \{(x, p) \in$

$\in \Lambda^n : y' \in \omega'_j,\ |x| > r_0 + 1\}$. Канонический оператор K_{Λ^n} мы построим по этому специальному покрытию $\{\Omega_j\}$, причем в качестве лагранжевой координатной плоскости (x_α, p_β) при $j < m$ выберем R^n_x. Возможность этого обеспечивается леммой 1. При этом константы γ_j, $1 \leqslant j \leqslant m$, в формуле (6) будут иметь вид, указанный в теореме 2. Величина $R > a$ в формуле (33) была произвольной. Возьмем $R > r_0 + 1$, $N = n - 1$. Тогда, очевидно,

$$f(\theta, k) = ik\beta_n \sum_{j=1}^{m} \int_{Q_j} e_j(x)\, h(r)\, \hat{J}_j^{-1/2} \left[\left\langle p, \frac{x}{r} \right\rangle + \left\langle \theta, \frac{x}{r} \right\rangle \right] \times$$

$$\times (1 + O(k^{-1}))\, e^{ik[S_j(x) - \langle\theta, x\rangle] - i\frac{\pi}{2}\gamma_j}\, dx +$$

$$+ \sum_{j>m} \sum_{s=0}^{N+1} k^{(|\beta|+n-1)/2 - s} \int_{Q_j} f_{j,s}(x, p_\beta)\, e^{ik[G_j(x, p_\beta) - \langle\theta, x\rangle] - i\frac{\pi}{2}\gamma_j}\, dp_\beta\, dx +$$

$$+ O(k^{-1}), \tag{34}$$

где $e_j = e_j(x)$, $e_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$; J_j дается формулой (28); функция $S_j = S_j(x)$ определена в теореме 1; $p = p(x)$ таково, что $(x, p) \in \Lambda^n$; функция $O(k^{-1})$, стоящая под знаком интеграла, зависит от x и является многочленом от k^{-1}; $f_{j,s}(x, p_\beta) = 0$ при $(x, p) \in \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant m} \Omega'_j$, т. е. при $y' \in \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant m} \omega'_j$, $|x| > r_0 + 1$. А так как $f_{j,s} \in C_0^\infty(Q_j)$ и $r > R > r_0 + 1$ в точках Q_j, то при $j > m$

$$f_{j,s}(x, p_\beta) = 0 \text{ при } y' \in \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant m} \omega'_j. \tag{35}$$

Применим к интегралам (34) при $j > m$ метод стационарной фазы. Имеем (см. лемму 4 из гл. V):

$$d[S - \langle x_\beta(x_\alpha, p_\beta), p_\beta\rangle] = \langle p_\alpha, dx_\alpha\rangle - \langle x_\beta, dp_\beta\rangle, \quad (x, p) \in \Lambda^n.$$

Значит,

$$d[G_j(x, p_\beta) - \langle\theta, x\rangle] =$$

$$= \langle p, dx\rangle + \langle x_\beta - x_\beta(x_\alpha, p_\beta), dp_\beta\rangle - \langle\theta, dx\rangle,\ p_\alpha = p_\alpha(x_\alpha, p_\beta).$$

Из леммы 1 и (35) следует, что при $\theta \in \overline{\Omega}_{\varepsilon/4}(\theta_0)$ на носителе функций $f_{j,s} = f_{j,s}(x, p_\alpha)$, $j > m$, нет точек стационарной фазы. Получаем, что при $\theta \in \Omega_{\varepsilon/4}(\theta_0)$

$$f(\theta, k) = ik\beta_n \sum_{j=1}^{m} \int_{R}^{R+1} \int_{|x|=r} e_j(x)\, h(r)\, \hat{J}_j^{-1/2} \left\langle p + \theta, \frac{x}{r} \right\rangle (1 + O(k^{-1})) \times$$

$$\times e^{ik[S_j(x) - \langle\theta, x\rangle] - i\frac{\pi}{2}\gamma_j}\, d\sigma\, dr + O(k^{-1}), \tag{36}$$

где $d\sigma$ — элемент площади сферы $|x|=r$. В интегралах по сферам $|x|=r$ перейдем к координатам y'. Для точек сферы $|x|=r$ в силу (12) при $r\to\infty$ имеем

$$x=p(y')r+q(y',r),\quad |q|+|D^{\alpha}_{y',r}q|<C(\alpha), \tag{37}$$

что вместе с (13) дает

$$\frac{d\sigma}{dy'}=I(y')r^{n-1}(1+O(r^{-1})),\ r\to\infty, \tag{38}$$

где функция $O(r^{-1})$ зависит, конечно, от y'. Так как $e_j\in C_0^\infty(\Omega_j)$, то $e_j(x)=0$ при $y'\bar\in\omega_j$. Таким образом, из (36), (29) и (38) получаем

$$f(\theta,k)=ik\beta_n\sum_{j=1}^{m}\int_R^{R+1}h(r)P_j(r,k,\theta)r^{(n-1)/2}\,dr+O(k^{-1}), \tag{39}$$

$$P_j=\int_{\omega_j}e_jI^{1/2}(y')\,(1+O(r^{-1}))\left\langle p+\theta,\ \frac{x}{r}\right\rangle(1+O(k^{-1}))\times$$

$$\times e^{ik[S_j(x)-\langle\theta,x\rangle]-i\frac{\pi}{2}\gamma_j}\,dy', \tag{40}$$

где $p=p(y')$, а x дается формулой (37). Интегралы (40) вычислим с помощью метода стационарной фазы. Имеем:

$$\frac{\partial(S_j-\langle\theta,x\rangle)}{\partial y_i}=\sum_{k=1}^{n}(p_k-\theta_k)\frac{\partial x_k}{\partial y_i},\quad i<n,$$

где x имеет вид (37). Таким образом, точка $y'=y'_{(j)}(\theta)$, в которой $p=\theta$, является точкой стационарной фазы, причем

$$\frac{\partial(S_j-\langle\theta,x\rangle)}{\partial y_i}=$$

$$=r\left[\sum_{k=1}^{n}(p_k(y')-\theta_k)\frac{\partial p_k(y')}{\partial y_i}+h_{i,j}(y',r)\right],\quad i<n, \tag{41}$$

$$h_{i,j}(y'_{(j)}(\theta),r)=0;\ |D^{\alpha}_{y'}h_{i,j}(y',r)|<Cr^{-1},\ r\to\infty. \tag{42}$$

Обозначим через B матрицу с элементами $b_{i,s}$, $1<i,s<n-1$:

$$b_{i,s}=\left[\frac{\partial}{\partial y_s}\sum_{k=1}^{n}(p_k-\theta_k)\frac{\partial p_k}{\partial y_i}\right]\Bigg|_{y'=y'_{(j)}(\theta)}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial p_k}{\partial y_s}\frac{\partial p_k}{\partial y_i}\right)\Bigg|_{y'=y'_{(j)}(\theta)}.$$

Если $P=\{p_{i,s}\}$ — матрица размера $(n-1)\times n$ с элементами

$$p_{i,s}=\left.\frac{\partial p_s(y')}{\partial y_i}\right|_{y'=y'_{(j)}(\theta)},$$

то $B=PP^*$. Допишем к матрице P в качестве последней строчки вектор $p(y'_{(j)}(\theta))$. Получающуюся квадратную матрицу обозначим через A. Так как $|p|=1$ при $|x|>R$, то при $|x|>R$

$$\sum_{k=1}^{n} p_k\frac{\partial p_k}{\partial y_i}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial y_i}|p|^2=0,$$

откуда следует, что

$$AA^*=\begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

С другой стороны, если $z=p(y')s$, то из соотношения $dz=s^{n-1}d\sigma_p ds$ и формулы (13) получаем

$$|\det A|=s^{1-n}\left|\frac{D(z)}{D(y',s)}\right|=s^{1-n}\frac{dz}{dy'\,ds}=\frac{d\sigma_p\,ds}{dy'\,ds}=I_j(\theta).$$

Из последних двух равенств вытекает, что при $\theta\in\overline{\Omega}_\varepsilon(\theta_0)$ матрица B положительно определена и $\det B=I^2_j(\theta)$. Но тогда из (41), (42) следует, что при $\theta\in\overline{\Omega}_\varepsilon(\theta_0)$, достаточно большом r_1 и $r>r_1$

1) матрица $H\equiv\left.\left\{\frac{\partial^2(S_j-\langle\theta,x\rangle)}{\partial y_i\,\partial y_s}\right\}\right|_{y'=y'_{(j)}(\theta)},$

$1\leqslant i,s\leqslant n-1$, положительно определена и

$$\det H=r^{n-1}\det B+O(r^{n-2})=r^{n-1}I_j^2(\theta)+O(r^{n-2}),$$

2) существует такая не зависящая от r окрестность $\widehat{\omega}_j(\theta)$ точки $y'_{(j)}(\theta)$, в которой единственной точкой стационарной фазы в интеграле (40) является точка $y'=y'_{(j)}(\theta)$.

При достаточно большом $r_2\geqslant r_1$ и $r>r_2$ уже во всей окрестности ω_j единственной точкой стационарной фазы в интеграле (40) будет точка $y'_{(j)}(\theta)$. Действительно, точки стационарной фазы для интеграла (40) можно определять из условия $\langle\nabla(S_j-\langle\theta,x\rangle),n\rangle=0$, $|x|=r$, где n — единичный вектор нормали к сфере $|x|=r$. Так как $\nabla S_j(x)=p(y')$ и в силу (37) $n=p(y')+O(r^{-1})$, то это условие можно переписать так: $\langle p-\theta,p+O(r^{-1})\rangle=0$. Далее, $|p|=|\theta|=1$ и $p=\theta$ при $y'\in\overline{\omega}_j$ только в точке $y'_{(j)}(\theta)$. Значит, функция $\langle p-\theta,p\rangle$ не обращается в нуль в $\omega_j\setminus\widehat{\omega}_j(\theta)$. А так как эта функция непрерывна, то, очевидно, $\langle p-\theta,p+O(r^{-1})\rangle\neq0$ при $y'\in\omega_j\setminus\widehat{\omega}_j(\theta)$ и r достаточно большом.

Окончательно получаем, что при $\theta\in\Omega_\varepsilon(\theta_0)$ и достаточно большом, но фиксированном R асимптотика интегралов (40) опреде-

ляется невырожденной стационарной точкой $y'=y'_{(j)}(\theta)$. Так как при $y'=y'_{(j)}(\theta)$, $\theta\in\Omega_{\varepsilon/2}(\theta_0)$, x, p, определяемом из (37), и достаточно большом r справедливы равенства

$$e_j=1,\ \langle p+\theta,\ x/r\rangle=2+O(r^{-1}),\ S_j(x)-\langle\theta,\ x\rangle=F_j(\theta),$$

где $F_j(\theta)$ имеет вид (14), то при $\theta\in\Omega_{\varepsilon/2}(\theta_0)$

$$P_j=\left(\frac{2\pi}{k}\right)^{(n-1)/2} 2I_j^{1/2}(\theta)\,(\det H)^{-1/2} e^{ikF_j(\theta)-i\frac{\pi}{4}(2\gamma_j-n+1)}\times$$

$$\times(1+O(r^{-1}))(1+O(k^{-1}))=$$

$$=\left(\frac{2\pi}{k}\right)^{(n-1)/2} 2r^{(1-n)/2}I_j^{-1/2}(\theta)\,e^{ikF_j(\theta)-i\frac{\pi}{4}(2\gamma_j-n+1)}\times$$

$$\times(1+O(r^{-1}))(1+O(k^{-1})).$$

Подставляя это равенство в (39) и учитывая формулу (31), получаем, что при достаточно малом $\varepsilon>0$ и $\theta\in\Omega_\varepsilon(\theta_0)$

$$f(\theta,k)=\sum_{j=1}^{m}\int_R^{R+1} I_j^{-1/2}(\theta)\,e^{ikF_j(\theta)-i\frac{\pi}{2}\gamma_j}h(r)(1+O(r^{-1}))dr+O(k^{-1}),$$

где $R>\max(r_0,r_2)$ — любое и $O(k^{-1})$ зависит, вообще говоря, от R. Так как $f(\theta,k)$ не зависит от R, то и главный член асимптотики этой функции не должен зависеть от R. Поэтому в последнем равенстве можно в главном члене асимптотики перейти к пределу при $R\to\infty$, оставив остаточный член отвечающим любому фиксированному значению $R>\max(r_0,r_2)$. При этом получаем разложение (15). ■

Литературные указания и дополнения. Результаты этой главы были опубликованы автором в [35, 36]. Асимптотика при $k\to\infty$ функции Грина для уравнения (1) была получена ранее в [64]. Другие результаты и литературу по рассматриваемым вопросам можно найти в [95, 73, 80, 60, 78]. В работах [150, 152, 151, 159, 173, 174] получена квазиклассическая асимптотика амплитуды рассеяния волн в однородной среде во внешности ограниченного тела. В [97] с помощью теоремы 1 получена асимптотика амплитуды рассеяния волн в неоднородной среде для окрестности каустических на бесконечности направлений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы.— М.: ИЛ, 1962.

2. Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида.— УМН, 1964, **19**, вып. 3, 53—161.

3. Агранович М. С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы.— УМН, 1965, **20**, вып. 5, 3—120.

4. Арнольд В. И. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k, D_k, E_k и лагранжевы особенности.— Функц. анализ, 1972, **6**, вып. 4, 3—26.

5. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М.: Наука, 1975.

6. Арсеньев А. А. Об особенностях аналитического продолжения и резонансных свойствах решения задачи рассеяния для уравнения Гельмгольца.— ДАН, 1971, **197**, № 3, 511—512.

7. Атья М. Лекции по K-теории.— М.: Мир, 1967.

8. Бабич В. М. О коротковолновой асимптотике функции Грина для внешности ограниченной выпуклой области.— ДАН, 1962, **146**, № 3, 571—573.

9. Бабич В. М. Об аналитическом продолжении резольвенты внешних задач для оператора Лапласа на второй лист.— В кн.: Теория функций, функц. анализ и их прилож., вып. 3.— Харьков, Изд-во ХГУ, 1966, с. 151—157.

10. Бабич В. М. Об асимптотике функции Грина некоторых волновых задач. II. Нестационарный случай.— Матем. сб., 1972, **87**, № 1, 44—57.

11. Бабич В. М. О строгом оправдании коротковолнового приближения в трехмерном случае.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1973, **34**, 23—51.

12. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.— М.: Наука, 1972.

13. Бабич В. М., Григорьева Н. С. Об аналитическом продолжении резольвенты внешних трехмерных задач для оператора Лапласа на второй лист.— Функц. анализ, 1974, **8**, вып. 1, 71—72.

14. Багиров Л. А., Кондратьев В. В. Об одном классе эллиптических уравнений в R^n.— Тр. семинара С. Л. Соболева, 1978, № 2, 5—17.

15. Басс Г. И., Костюченко А. Г. О принципе предельной амплитуды.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., 1959, № 5, 153—164.

16. Берг Й. Лёфстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение.— М.: Мир, 1980.

17. Блехер П. М. Об операторах, зависящих мероморфно от параметра.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., 1969, № 5, 30—36.

18. Боровиков В. А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках.— М.: Наука, 1966.

19. Буслаев В. С. О коротковолновой асимптотике в задаче дифракции на выпуклых телах.— ДАН, 1962, **145**, № 4, 753—756.

20. Буслаев В. С. Рассеянные плоские волны, спектральные асимптотики и формулы следа во внешних задачах.— ДАН, 1971, **197**, № 5, 999—1002.

21. Буслаев В. С. Теория потенциала и геометрическая оптика.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1971, **22**, 175—180.

22. Буслаев В. С. Об асимптотическом поведении спектральных характеристик внешних задач для оператора Шредингера.— Изв. АН СССР, сер. матем., механ., 1975, **39**, № 1, 149—235.

23. Вайнберг Б. Р. Асимптотическое поведение фундаментальных решений гипоэллиптических уравнений с двумя переменными и задача с условиями на бесконечности.— ДАН, 1962, **144**, № 5, 958—961.

24. Вайнберг Б. Р. Асимптотическое представление фундаментальных решений гипоэллиптических уравнений и задача во всем пространстве с условиями на бесконечности.— ДАН, 1962, **145**, № 1, 21—23.

25. Вайнберг Б. Р. О некоторых корректных задачах во всей плоскости для гипоэллиптических уравнений.— Матем. сб., 1963, **62**, № 2, 186—248.

26. Вайнберг Б. Р. Принципы излучения, предельного поглощения и предельной амплитуды в общей теории уравнений с частными производными.— УМН, 1966, **21**, вып. 3, 115—194.

27. Вайнберг Б. Р. Об эллиптических задачах в неограниченных областях.— Матем. сб., 1968, **75**, № 3, 454—480.

28. Вайнберг Б. Р. Об аналитических свойствах резольвенты для одного класса пучков операторов.— Матем. сб., 1968, **77**, № 2, 259—296.

29. Вайнберг Б. Р. Поведение решения задачи Коши для гиперболического уравнения при $t\to\infty$.— Матем. сб., 1969, **78**, № 4, 542—578.

30. Вайнберг Б. Р. О принципе предельной амплитуды.— Матем. сб., 1971, **86**, № 1, 90—109.

31. Вайнберг Б. Р. О внешних эллиптических задачах, полиномиально зависящих от спектрального параметра, и асимптотике при больших временах решений нестационарных задач.— Матем. сб., 1973, **92**, № 2, 224—241.

32. Вайнберг Б. Р. Принцип предельной амплитуды.— Изв. высш. учебн. завед., сер. матем., 1974, № 2, 12—23.

33. Вайнберг Б. Р. Поведение при больших временах решений уравнения Клейна—Гордона.— Труды ММО, 1974, **30**, 139—158.

34. Вайнберг Б. Р. О коротковолновой асимптотике решений стационарных задач и асимптотике при $t\to\infty$ решений нестационарных задач.— УМН, 1975, **30**, вып. 2, 3—55.

35. Вайнберг Б. Р. О стационарных задачах теории рассеяния и поведении при больших значениях времени решений нестационарных задач.— В кн.: Труды Всесоюзной конференции по уравнениям с частными производными.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1977, с. 58—62.

36. Вайнберг Б. Р. Квазиклассическое приближение в стационарных задачах рассеяния.— Функц. анализ, 1977, **11**, вып. 4, 6—18.

37. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы.— М.: Советское радио, 1966.

38. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации.— М.: Советское радио, 1966.

39. Векуа И. Н. О метагармонических функциях.— Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, 1943, **12**, 105—174.

40. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике.— М.: Наука, 1976.

41. Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. Метод энергетических оценок в смешанной задаче.— УМН, 1980, **35**, вып. 5, 53—120.

42. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости.— М.: Наука, 1974.

43. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.— М.: Наука, 1979.

44. Гальперн С. А. Фундаментальные решения и лакуны квазигиперболических уравнений.— УМН, 1974, **29**, вып. 2, 154—165.

45. Гатауллин Т. М. Поведение при $t\to\infty$ решения задачи Коши для гиперболического уравнения.— Труды МИЭМ, 1974, вып. 26.

46. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними.— М.: Физматгиз, 1958.

47. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций.— М.: Физматгиз, 1958.

48. Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений.— М.: ИЛ, 1961.

49. Горин Е. А. Об асимптотических свойствах многочленов и алгебраических функций от нескольких переменных.— УМН, 1961, **16**, вып. 1, 91—118.

50. Грушин В. В. Об условиях типа Зоммерфельда для некоторого клас-

са дифференциальных уравнений в частных производных.— Матем. сб., 1963, **61**, № 2, 147—174.

51. Грушин В. В. Об условиях типа Зоммерфельда для некоторого класса дифференциальных уравнений в частных производных (автореф. канд. дис.).— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1963.

52. Дородницын А. А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка.— УМН, 1952, 7, вып. 6, 3—96.

53. Дюженкова Л. И., Нижник Л. П. Аналитическое продолжение резольвенты самосопряженного оператора через непрерывный спектр.— УМЖ, 1968, **20**, № 6, 759—765.

54. Евграфов М. А., Федорюк М. В. Асимптотика решений уравнения $w''(z)-p(z, \lambda)w(z)=0$ при $\lambda\to\infty$ в комплексной плоскости.— УМН, 1966, **21**, вып. 1, 3—50.

55. Иврий В. И. Экспоненциальное убывание решений волнового уравнения во внешности почти звездной области.— ДАН, 1969, **189**, № 5, 938—940.

56. Иврий В. И. Распространение особенностей решений волнового уравнения вблизи границы.— ДАН, 1978, **239**, 772—774.

57. Иосифьян Г. А., Олейник О. А. Аналог принципа Сен-Венана для эллиптического уравнения второго порядка и единственность решений краевых задач в неограниченных областях.— УМН, 1976, **31**, вып. 4, 261—262.

58. Йон Ф. Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными.— М.: ИЛ, 1958.

59. Крайс Х. О. Смешанная задача для гиперболических систем.— Математика (сб. переводов), 1970, **14**, № 4, 98—115.

60. Кузьменко А. В. Представление волновой функции функциональным интегралом и квазиклассическое приближение в задаче рассеяния.— ТМФ, 1976, **29**, № 1, 52—58.

61. Купрадзе В. Д. Методы теории потенциала в теории упругости.— М.: ГИТТЛ, 1963.

62. Купрадзе В. Д., Гегелия Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В. Трехмерные задачи математической теории упругости.— Тбилиси, 1968.

63. Курант Р. Уравнения с частными производными.— М.: Мир, 1964.

64. Кучеренко В. В. Квазиклассическая асимптотика функции точечного источника для стационарного уравнения Шредингера.— Теор. и матем. физика, 1969, **1**, № 3, 384—406.

65. Кучеренко В. В. Асимптотика решений задачи Коши для уравнений с комплексными характеристиками.— В кн.: Современные проблемы математики, т. 8.— М.: Изд-во ВИНИТИ, 1977, с. 41—136.

66. Ладыженская О. А. О принципе предельной амплитуды.— УМН, 1957, **12**, вып. 3, 161—164.

67. Ладыженская О. А., Солонников В. А. Нахождение в неограниченных областях решений стационарных краевых задач для уравнения Навье—Стокса, имеющих бесконечную диссипацию.— ДАН, 1979, **249**, № 4, 828—831.

68. Лакс П., Филипс Р. Теория рассеяния.— М.: Мир, 1971.

69. Ландис Е. М. О поведении решений эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченных областях.— Труды ММО, 1974, **31**, 35—81.

70. Лере Ж. Дифференциальное и интегральное исчисления на комплексном аналитическом многообразии.— М.: ИЛ, 1961.

71. Лионс Ж. Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М.: Мир, 1971.

72. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. Оценки в L_p и в классах Гельдера и принцип Миранда—Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе.— Math. Nachrichten, 1978, Bd 81, 25—82.

73. Маслов В. П. Задача рассеяния в квазиклассическом приближении.— ДАН, 1963, **151**, № 2, 306—309.

74. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы.— М.: Изд-во МГУ, 1965.

75. Маслов В. П. Операторные методы.— М.: Наука, 1973.

76. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях.— М.: Наука, 1977.

77. Маслов В. П. Распространение ударных волн в изоэнтропическом невязком газе.— В кн.: Совр. пробл. математики, т. 8.— М.: Изд-во ВИНИТИ, 1977, с. 199—272.

78. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассические приближения для уравнений квантовой механики.— М.: Наука, 1976.

79. Маслов В. П., Цупин В. А. Распространение ударной волны в изоэнтропическом газе с малой вязкостью.— В кн.: Совр. пробл. математики, т. 8.— М.: Изд-во ВИНИТИ, 1977, с. 273—308.

80. Мигдал А. Б., Крайнов В. П. Приближенные методы квантовой механики.— М.: Наука, 1966.

81. Милнор Дж. Теория Морса.— М.: Мир, 1965.

82. Минский В. Я. Краевые задачи для неоднородного эллиптического дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами в полупространстве.— УМН, 1972, **27**, вып. 3, 209—210.

83. Михайлов В. П. Об асимптотическом поведении при $t\to\infty$ решений некоторых нестационарных граничных задач.— ДАН, 1965, **162**, № 3, 506—509.

84. Михайлов В. П. О стабилизации решения одной нестационарной граничной задачи. — Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, 1967, **91**, 100—112.

85. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных.— М.: Наука, 1976.

86. Мищенко А. С., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е. Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора.— М.: Наука, 1978.

87. Муравей Л. А. Асимптотическое поведение решений второй внешней краевой задачи для двумерного волнового уравнения.— Дифф. уравнения, 1970, **6**, № 12, 2248—2262.

88. Муравей Л. А. Асимптотическое поведение при больших значениях времени решений второй и третьей краевых задач для волнового уравнения с двумя пространственными переменными. — Труды Матем. ин-та им. Стеклова, 1973, **126**, 73—144.

89. Муртазин Х. Х. Оценки решений уравнения Гельмгольца и их приложения в спектральной теории.— ДАН, 1974, **215**, № 3, 539—542.

90. Назайкинский В. Е., Ошмян В. Г., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е. Интегральные операторы Фурье и канонический оператор.— УМН, 1981, **36**, вып. 2, 81—140.

91. Найфе А. Х. Методы возмущений.— М.: Мир, 1976.

92. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.— М.: Наука, 1969.

93. Олейник О. А., Радкевич Е. В. Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений.— УМН, 1978, **33**, вып. 5, 7—76.

94. Олейник О. А., Иосифьян Г. А. О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с некомпактной границей. — Матем. сб., 1980, **112**, № 4, 588—610.

95. Паташинский А. З., Покровский В. Л., Халатников И. М. Квазиклассическое рассеяние в центрально-симметричном поле. — ЖЭТФ, 1963, **45**, № 4, 989—1002.

96. Повзнер А. Я. О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора — $\Delta u+cu$. — Матем. сб., 1953, **32**, № 1, 109—156.

97. Протас Ю. Н. Квазиклассическая асимптотика амплитуды рассеяния плоской волны на неоднородностях среды. — Матем. сб., 1982, **117**, № 4.

98. Рамм А. Г. Спектральные свойства оператора Шредингера в областях с бесконечной границей.— ДАН, 1963, **152**, № 2, 282—285.

99. Рамм А. Г. Об области, свободной от резонансных полюсов в задаче рассеяния на трехмерном потенциале.— ДАН, 1966, **166**, № 6, 1319—1322.

100. Сакамото Р. Смешанные задачи для гиперболических уравнений. I, II.— Математика (сб. переводов), 1972, **16**, № 1, 62—99.

101. Свешников А. Г. О принципе излучения.— ДАН, 1950, 73, № 5, 917—920.
102. Свешников А. Г. Принцип предельного поглощения для волновода.— ДАН, 1951, 80, № 3, 341—344.
103. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. I.— М.: Наука, 1973.
104. Стокер Дж. Дж. Волны на воде.— М.: ИЛ, 1959.
105. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О принципе излучения.— ЖЭТФ, 1948, 18, № 2, 243—248.
106. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.— М.: Гостехиздат, 1953.
107. Трев Ж. Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами.— М.: Мир, 1965.
108. Фаддеев Л. Д. Строение резольвенты оператора Шредингера системы трех частиц и задача рассеяния. — ДАН, 1962, 145, № 2, 301—304.
109. Фаддеев Л. Д. Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц. — Труды Матем. ин-та им. Стеклова, 1963, 69, 3—122.
110. Федорюк М. В. Метод перевала. — М.: Наука, 1977.
111. Федорюк М. В. Особенности ядер интегральных операторов Фурье и асимптотика решения смешанной задачи.— УМН, 1977, 32, № 6, 67—115.
112. Федорюк М. В. Асимптотика решения краевой задачи со скользящими лучами для дифференциальных уравнений второго порядка.— Труды ММО, 1981, 42, 64—104.
113. Фейгин В. И. Новые классы псевдодифференциальных операторов в R^n и некоторого приложения. — Труды ММО, 1976, 36, 155—194.
114. Филиппов А. Ф. Обоснование высокочастотной асимптотики в трехмерной дифракционной задаче.— СМЖ, 1969, 10, № 6, 1406—1421.
115. Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн.— М.: Советское радио, 1970.
116. Хермандер Л. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных.— М.: ИЛ, 1959.
117. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными.— М.: Мир, 1965.
118. Хермандер Л. Интегральные операторы Фурье. — Математика (сб. переводов), 1974, 16, № 1, 17—61; № 2, 67—136.
119. Хруслов Е. Я. Исследование предельного случая первой краевой задачи.— В кн.: Теория функций, функц. анализ и их прилож., вып. 1.— Харьков: Изд-во ХГУ, 1965, с. 71—87.
120. Шилов Г. Е. Локальные свойства решений дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами.— УМН, 1959, 14, вып. 5, 3—44.
121. Шимон Л. Об апроксимации решений краевых задач в областях с неограниченной границей.— Матем. сб., 1973, 91, № 4, 488—499.
122. Эйдус Д. М. О принципе предельного поглощения. — ДАН, 1959, 125, № 3, 508—511.
123. Эйдус Д. М. О принципе предельного поглощения. — Матем. сб., 1962, 57, № 1, 13—44
124. Эйдус Д. М. О принципе предельной амплитуды.— ДАН, 1964, 158, № 4, 794—797.
125. Эйдус Д. М. Принцип предельной амплитуды.— УМН, 1969, 24, вып. 3, 91—156.
126. Agmon S. Spectral properties of Schrödinger operators and scattering theory.— Ann. scuola normale superiore, Pisa, 1975, N 2, 151—218.
127. Agmon S. Some new results in spectral and scattering theory of differential operators on R^n.— Seminaire Goulauic — Schwartz, 1978, octobre, 1—11.
128. Arena O., Littman W. «Farfield» behavior of solutions to partial differential equations asymptotic expansions and maximal rates of decay along a ray.— Ann. scuola normale superiore, Pisa, 1972, 26, N 4, 807—827.
129. Avila G., Keller J. The high-freguency field of a point source in an inhomogeneous medium.— Com. Pure Appl. Math., 1963, 16, N 4, 363—381.

130. Birkhoff D. Quantum mechanics and asymptotic series.— Bull. Amer. Math. Soc., 1933, 39, 681—700.
131. Chazarain J. Construction de la parametrix du problemes mixtes hyperboliques pour l'equation des ondes.— C. R. Acad. Sci. Paris, 1973, 276, 1213—1215.
132. Duistermaat J. Fourier integral operator.— Lecture Notes, Courant Inst. Math. Sciences, New York, 1973.
133. Hörmander L. Lower bounds at infinity for solutions of differential equations with constant coefficients.— Israel J. Math., 1973, 16, N 1, 103—116.
134. Ikebe T., Saito Y. Limiting absorption method and absolute continuity for the Schrödinger operator.— J. Math. Kyoto Univ., 1972, 7, 513—542.
135. Iwasaki N. Local decay of solutions for symmetric hyperbolic systems with dissipative and coercive boundary conditions in exterior domains.— Publ. RIMS Kyoto Univ., 1969, 5, N 2, 193—218.
136. Jäger W. Ein gewöhnlicher differential operator zweiter ordnung für functionen mit werten in einem Hilbertraum.— Math. Z., 1970, 113, 68—98.
137. Kuroda S. Scattering theory for differential operators II, self adjoint elliptic operators.— J. Math. Soc. Japan, 1973, 25, N 2, 222—234.
138. Lax P. Asymptotic solutions of oscillatory initial value problems.— Duke Math. J., 1957, 24, N 4, 627—646.
139. Lax P., Morawetz C., Phillips R. Exponential decay of solutions of the wave equation in the exterior of a star-shaped obstacle.— Comm. Pure Appl. Math., 1963, 16, N 4, 477—486.
140. Lax P., Phillips R. A logarithmic bound on the location of the poles of the scattering matrix.— Arch. Rath. Mech. and Anal., 1971, 40, N 4, 268—280.
141. Lax P., Phillips R. Scattering theory.— Rocky Mountain J. Math., 1971, 1, N 1, 173—223.
142. Lavin R. Absolute continuity of positive spectrum for Shrödinger operators with long-range potentials.— J. Functional Analysis, 1973, 12, 30—54.
143. Leray J. Analyse lagrangienne et mécanique quantique.— Strasbourg Univ. L. Pasteur, 1978.
144. Levin H., Schwinger J. On the theory of electromagnetic wave diffraction by an aperture in an infinity plan conducting screen.— Comm. Pure Appl. Math., 1950, 3, N 4, 355—392.
145. Lighthill M. Studies on magneto-hydrodynamic waves and other anisotropic waves motions.— Philosophical transactions of the royal society of London, ser A, 1960, 252, N 1014, 397—430.
146. Littman W. Maximal rates of decay of solutions of partial differential equations.— Arch. Rat. Mech. and Analysis, 1970, 37, N 1, 11—20.
147. Ludwig D. Uniform asymptotic expansion of the field scattered by a convex object at high frequencies.— Com. Pure Appl. Math., 1967, 20, N 1, 103—138.
148. MacCamy R. Low frequency acoustic oscillations.— Quart. J. Appl. Math., 1965, 23, N 3, 247—255.
149. Majda A., Osher S. Reflection of singularities at the boundary.— Comm Pure Appl. Math., 1975, 28, 479—499.
150. Majda A. High frequency asymptotic for the scattering matrix and the inverse problem of acoustical scattering.— Comm. Pure Appl. Math., 1976, 29, N 3, 261—291.
151. Majda A. A representation formula for the scattering operator and the invers problem for arbitrary bodies.— Comm. Pure Appl. Math., 1977, 30, 165—194.
152. Majda A., Taylor M. The asymptotic behavior of the diffraction peak in classical scattering.— Comm. Pure Appl. Math., 1977, 30, N 5, 639—669.
153. Malgrange B. Existence et approximation des solution des equations aux dérivées partielles et des equations de convolution.— Ann. Inst. Fourier, 1956, 6, 271—351.
154. Matsumura M. Comportement asymptotige de solutions de certains

problemes mixtes pour des systemes hyperboliques symetriques a coefficients constants.— Publ. RIMS Kyoto Univ., 1970, 5, N 3, 301—360.

155. Matsumura M. Uniform estimates of elementary solutions of first order systems of partial differential equations.— Publ. RIMS Kyoto Univ., 1970, 6, 293—305.

156. Matsumura M. Asymptotic behavior at infinity for Green's functions of first order systems with characteristics of nonuniform multiplicity.— Publ. RIMS Kyoto Univ., 1976, 12, N 2, 317—377.

157. Melrose R. Microlocal parametrices for diffractive boundary value problems.— Duke Math. J., 1975, 42, N 4, 605—635.

158. Melrose R. Sjöstrand J. Singularities of boundary value problems I.— Comm. Pure Appl. Math., 1978, 31, 593—617.

159. Melrose R. Forward scattering by a convex obstacle.— Comm. Pure Appl. Math., 1980, 33, N 4, 461—499.

160. Mizohata S., Mochizuki K. On the principle of limiting amplitude for dissipative wave equations.— J. Math. Kyoto Univ., 1966, 6, N 1, 109—127.

161. Mochizuki K. The principle of limiting amplitude for symmetric hyperbolic systems in an exterior domain.— Publ. RIMS Kyoto Univ., 1969, 5, N 2, 259—265.

162. Mochizuki K. Growth properties of solutions of second order elliptic differential equations.— J. Math. Kyoto Univ., 1976, 16, N 2, 351—373.

163. Mochizuki K., Uchiyama J. Radiation conditions and spectral theory for 2 body Scrödinger operators with «oscillating» long-range potentials III.— Preprint.

164. Mochizuki K. Asymptotic wave functions and energy distributions for long-range perturbations of the d'Alambert equation.— Preprint.

165. Morawetz C. The limiting amplitude principle.— Comm. Pure Appl. Math., 1962, 15, N 3, 349—361.

166. Morawetz C. On the modes of decay for the wave equation in the exterior of a reflecting body.— Proc. Royal Irish Acad. Sec. A, 1972, 72, N 9, 113—120.

167. Morawetz C., Ludwig D. An inequality for reduced wave operator and the justification of geometrical optics.— Comm. Pure Appl. Math., 1968, 21, N 2, 187—203.

168. Morawetz C., Ludwig D. The generalized Huyghens' principle for reflecting bodies.— Comm. Pure Appl. Math., 1969, 22, N 2, 189—206.

169. Morawetz C., Ralston J., Strauss W. Decay of solutions of the wave equation outside nontrapping obstacles.— Comm. Pure Appl. Math., 1977, 30, N 4, 447—508.

170. Murata M. Rate of decay of local energy and spectral properties of elliptic operators.— Japan J. Math., 1980, 60, N 1, 77—127.

171. Murata M. High energy resolvent estimates I, first order operators.— Preprint.

172. Nirenberg L. Lectures on linear partial differential equations.— Regional Conference, series in Math, № 17, Providence, Rhode Island, 1973.

173. Petkov V. Propagation des singularités pour le probléme de transmission et application an probléme inverse de la diffusion.— C. R. Acad. Sci. Paris, Série A, 1980, 290, 753—755.

174. Petkov V. High frequency asymptotics of the scattering amplitude for non-convex bodies.— Comm. Part. Dif. Equations, 1980, 5, 293—329.

175. Ralston J. Solutions of the wave equation with localized energy.— Comm. Pure Appl. Math., 1969, 22, N 6, 807—823.

176. Ralston J. Variation of the transmission coefficient and comparison theorems for the scattering matrix.— Comm. Pure Appl. Math., 1972, 25, N 1, 45—61.

177. Ralston J. Note on the decay of acoustic waves.— Preprint.

178. Rauch J. L_2 is a continuable initial condition for Kreiss' mixed problems.— Comm. Pure Appl. Math., 1972, 25, N 3, 265—285.

179. Rauch J. Asymptotic behavior of solutions to hyperbolic partial dif-

ferential equations with zero speeds.— Comm. Pure Appl. Math., 1978, 31, N 4, 431—480.

180. Saito Y. The principle of limiting absorption for second order differential equations with operator-valued coefficients.— Publ. RIMS Kyoto Univ., 1971/72, 7, 581—619.

181. Saranen J. On decomposition of solutions of some higher order elliptic equations.— Annales Acad. Scientiarum Fennic, Ser. A, 1978/1979, 4, 267—277.

182. Schulenberger J., Wilcox C. Eigenfunction expansions and scattering theory for wave propagation problem of classical physics.— Arch. Rat. Mech. and Analysis, 1972, 64, N 5, 280—320.

183. Shenk N., Thoe D. Outgoing solutions of $(-\Delta+q-k^2)u=f$ in an exterior domain.— J. of Math. Anal. and Appl., 1970, 31, N 1, 81—116.

184. Taylor M. Reflection of singularities of solutions of systems of differential equations.— Comm. Pure Appl. Math., 1975, 28, 457—478.

185. Taylor M. Grazing rays and reflection of singularities of solutions to wave equations.— Comm. Pure Appl. Math., 1976, 29, N 1, 1—38.

186. Thoe D. On the exponential decay of solutions of the wave equation.— J. Math. Analysis and Appl., 1966, 16, 333—346.

187. Treves F. Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators.— Plenum Press, New York and London, 1980.

188. Ursell F. On the short-wave asymptotic theory of the wave equation $(\nabla^2+k^2)\varphi=0$.— Proc. Cambr. Phil. Soc., 1957, 53, N 1, 115—133.

189. Vogelsang V. Elliptische differentialgleichungen mit variablen koeffizienten in gebieten mit unbeschränktem rand.— Manuscripta math., 1975, 14, N 4, 379—401.

190. Wakabayashi S. The principle of limit amplitude for symmetric hyperbolic systems of first order in the half-space R_+^n.— Publ. RIMS Kyoto Univ., 1975, 11, 149—162.

191. Wilcox C. Asymptotic wave functions and energy distributions in strongly propagative anisotropic media.— J. Math. Pures et Appliquées, 1978, 57, 275—321.

192. Witsch K. Radiation Conditions and the exterior Dirichlet problem for a class of higher order elliptic equations.— J. Math. Analysis and Appl., 1976, 54, 820—839.

193. Zachmanoglou E. The decay of solutions of the initial-boundary value problem for the wave equation in unbounded regions.— Arch. Rath. Mech. and Analysis, 1963, 14, N 4, 312—325.

194. Rellich F. Über das asymptotische verhalten der lösungen von $\Delta u+$ $+\lambda u=0$ in unendlichen gebieten.— Jahresbericht der Deutsch. Math. Ver., 1943, 5, N 1, 57—63.

195. Dolph C., McLeod J., Thoe D. The analytic continuation of the resolvent kernel and scattering operator associated with the Schroedinger operator.— J. Math. Analysis and Appl., 1966, 16, 311—332.

196. Винник А. А. Условия излучения для областей с бесконечными границами.— Изв. высш. учебн. завед., сер. матем., 1977, № 7.

197. Панеях Б. П. О существовании и единственности решения n-метагармонического уравнения в неограниченном пространстве.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., 1959, № 5, 123—125.

НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

	страницы
Если $x, \xi \in R^n$, то $<x, \xi> = (x, \xi)$ — скалярное произведение	18, 47
$\partial x/\partial \xi$ — матрица Якоби	26
$D(x)/D(\xi)$ — якобиан	18, 102
$D^\alpha = i^{\lvert\alpha\rvert} \dfrac{\partial^{\lvert\alpha\rvert}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\lvert\alpha\rvert = \Sigma\alpha_i$	70, 130
$\sigma_j(\omega)$, $j=1, 2, \ldots,$ — точки на поверхности (вещественных нулей характеристического многочлена), в которых нормаль параллельна вектору $\omega = x/\lvert x\rvert$	25, 150, 160
$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_\varkappa)$, где $\mu_j = \pm 1$, — вектор, определяющий ориентацию поверхности вещественных нулей характеристического многочлена и выбор условий излучения	150
$\mathcal{E}\mu$ — фундаментальные решения уравнений типа Гельмгольца, $E\mu$ — их образы Фурье	150
$\mu_j(\omega)$, $j=1, 2, \ldots$ (не путать с $\mu_j = \pm 1$) — частоты волн от точечного источника, идущих в направлении $\omega = x/\lvert x\rvert$	150

Операторы

A^μ	172, 178
A_k^μ	193
$A^1{}_k$, $A^2{}_k$	195
B_k^1, B_k^2, C_k^1, C_k^2	210
$\mathfrak{A}_k$	139, 210
R_k, $\widehat{R}_k$	210, 211, 235
$K(\Omega_j)$	110
K_Λ, K_{Λ^n}	115, 269

Области комплексной плоскости

D_γ, D_γ^+, D_γ^-	206
$\mathcal{D}_n$	210
$U_{\alpha,\beta}$	236
C'	252

Пространства и нормы в них

Борис Руфимович Вайнберг

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
В УРАВНЕНИЯХ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Заведующий редакцией *С. И. Зеленский*
Редактор *А. А. Локшин*
Мл. редактор *О. М. Денисова*
Художественный редактор *Л. В. Мухина*
Переплет художника *И. И. Сенько*
Технический редактор *Г. Д. Колоскова*
Корректоры *И. А. Мушникова,*
Малякова Т. М.

Тематический план 1982 г. № 111
ИБ № 1388

Сдано в набор 22.02.82 Подписано к печати 26.11.82 Л-110230 Формат 60×90$^1/_{16}$ Бумага тип. № 1 Усл. печ. л. 18,5 Уч.-изд. л. 20,17 Изд. № 2318 Зак. 368 Тираж 4960 экз. Цена 3 руб.

Ордена «Знак Почета» издательство
Московского университета.
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.
Типография ордена «Знак Почета»
издательства МГУ.
Москва, Ленинские горы